

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TECHNIK INFORMACYJNYCH

Rozprawa doktorska

mgr inż. Grzegorz Zalewski

**Wielokryterialne modele sprawiedliwej optymalizacji dla
rozdziału zasobów sieciowych**

Promotor

dr hab. inż. Andrzej Stachurski

Warszawa 2021

Streszczenie

Przedmiotem rozprawy jest przedstawienie wyników prac badawczych związanych z rozwojem modeli i algorytmów wielokryterialnej optymalizacji dla efektywnego i sprawiedliwego rozdziału zasobów. Zadania optymalizacyjne opisane w pracy dotyczą problemów rozdziału ograniczonych zasobów (jednego lub więcej) pomiędzy konkurujące procesy (aktywności, usługi, użytkowników, agentów) tak, aby osiągnąć najlepszą wydajność systemu jako całości, przy jednoczesnym zaspokojeniu potrzeb poszczególnych procesów, ze szczególnym uwzględnieniem najbardziej dyskryminowanych. Obok efektywności całego systemu, istotnym czynnikiem oceny rozdziału zasobów jest minimalizacja nierówności (rozbieżności). Oznacza to sprawiedliwe (bezstronne i równe) traktowanie wszystkich konkurujących procesów. W rzeczywistości napotykanym jest wiele obszarów, gdzie kryterium sprawiedliwości jest jednym z czynników determinującym ocenę. Bardzo istotną grupą rozproszonych systemów wymagających efektywnego i sprawiedliwego rozdziału zasobów są sieci telekomunikacyjne. Na tym przykładzie, w pracy zostały opisane wyniki działania nowo opracowanych algorytmów optymalizacji sprawiedliwej. W kolejnych rozdziałach dokładnie opisano modele w postaci matematycznej pozwalającej na implementację ich według reguł programowania liniowego. Dokonano szeregu porównań wyników uzyskanych przy wykorzystaniu dobrze znanych metod optymalizacji sprawiedliwej takich jak metoda uporządkowanych średnich ważonych, metoda punktu odniesienia czy maksymalizacji leksykograficznej z opracowanymi modelami ilorazowymi, które stanowią główny efekt badań. Do oceny badanych metod zostały wybrane zarówno klasyczne miary nierówności wykorzystywane w statystyce, takie jak odchylenie standardowe, rozrzut, jak i miary sprawiedliwości znajdujące zastosowanie w problemach sieciowych, do których zaliczyć należy współczynnik Giniego oraz Jaina. W dalszej części pracy poruszony został również problem niespójności sieci dużych rozmiarów, bazującej na danych rzeczywistych. W tym celu zaproponowane zostały dwa podejścia do wstępnego przetworzenia danych wejściowych przy wykorzystaniu interfejsu graficznego pozwalającego na wybór zestawu węzłów sieci oraz przedstawienie otrzymanego wyniku w postaci topologii, zawierającej połączenia rzeczywiste oraz pomocnicze, które zostały wygenerowane w celu zapewnienia spójności sieci.

Słowa kluczowe: Modele wielokryterialne, Optymalizacja liniowa, Sprawiedliwość, Rozmieszczenie zasobów ograniczonych, Wymiarowanie sieci

Abstract

The results of research works related to the development of models and algorithms of multi-criteria optimization for effective and fair distribution of resources are presented. The optimization tasks described in the paper concern the problems of allocating limited resources (one or more) between competing processes (activities, services, users, agents) so as to achieve the best performance of the system as a whole, while meeting the needs of individual processes, with particular emphasis on those most discriminated. In addition to the effectiveness of the entire system, an important factor in assessing the allocation of resources is the minimization of inequalities (discrepancies). This means fair (impartial and equal) treatment of all competing processes. In fact, many areas are encountered where the fairness criterion is an important evaluation criterion. Telecommunications networks are a very important group of distributed systems requiring efficient and fair distribution of resources. On this example, the thesis describes the results of newly developed equitable optimization algorithms. The following chapters describe in detail the models in a mathematical form that allows their implementation according to the principles of linear programming. A series of comparisons of the results obtained with the use of well-known methods of equitable optimization, such as the method of ordered weighted means, the method of reference point or lexicographic maximization, were made with the developed ratio models, which constitute the main effect of the research. For the evaluation of the tested methods, both classical measures of inequality used in statistics, such as standard deviation, dispersion, and measures of equity applicable to network problems, which include the Gini and Jain coefficients, were selected. In the further part of the work, the problem of the inconsistency of large networks based on real data was also discussed. For this purpose, two approaches to pre-processing the input data with the use of a graphical interface allowing the selection of a set of network nodes and the presentation of the obtained result in the form of a topology containing real and auxiliary connections that have been generated to ensure network coherence have been proposed.

Keywords: Multicriteria, Linear optimization, Fairness, Resource allocation, Network dimensioning

Spis treści

1	Wstęp.....	7
2	Sprawiedliwy rozdział zasobów ograniczonych (RZO).....	10
2.1	Pojęcie sprawiedliwości, równości w odniesieniu do problemów optymalizacyjnych 10	
2.2	Miary nierówności wykorzystywane w modelach optymalizacji sprawiedliwej	16
2.3	Sformułowanie problemu dla rozdziału zasobów ograniczonych w sieci.....	31
2.4	Modele optymalizacji bezpośredniej dla problemu RZO	45
3	Modele ilorazowe dla sprawiedliwego rozdziału zasobów ograniczonych (RZO).....	60
3.1	Modele dwukryterialne optymalizacji liniowej	60
3.2	Dwukryterialny model ilorazowy uwzględniający k-najmniejszych wartości funkcji odniesienia.....	66
3.3	Metoda ilorazowa optymalizacji sprawiedliwej uwzględniająca współczynnik Giniego jako miarę sprawiedliwości	79
3.4	Podsumowanie wad i zalet zastosowanych metod	85
4	Modele sprawiedliwego przydziału zasobów oraz algorytmy wyznaczania połączeń w sieciach niepełnych.....	87
4.1	Opis badanego problemu	87
4.1.1	Wprowadzenie do zagadnienia.....	87
4.1.2	Charakterystyka danych wejściowych	92
4.2	Problem niespójności sieci i algorytmy pozwalające na wyznaczenie połączenia między zadaną grupą węzłów.....	94
4.2.1	Założenia przyjęte przy procesie przetworzenia danych wejściowych.....	94
4.2.2	Zestawienie połączeń	97
4.3	Zadanie alokacji ograniczonych zasobów obciążen na przykładzie sieci wyznaczonej na danych rzeczywistych.....	101
5	Algorytmy heurystyczne dla zestawiania połączeń w sieciach niepełnych	108

5.1	Metoda heurystyczna dla problemu ustalania połączeń między zadanymi lokalizacjami	108
6	Wskazanie osiągniętych celów i ewentualnych niepowodzeń oraz określenie dalszych kroków i możliwych kierunków rozwoju.....	115
7	Spis pojęć i oznaczeń użytych w pracy	119
8	Bibliografia.....	122
9	Spis rysunków	126
10	Spis tabel	128

1 Wstęp

Przedmiotem rozprawy są modele i algorytmy wielokryterialnej optymalizacji dla efektywnego i sprawiedliwego rozdziału zasobów w złożonych systemach obsługujących wiele zapotrzebowań. Zagadnienia rozdziału zasobów dotyczą decyzji rozdziału ograniczonego zasobu (lub wielu różnych zasobów) pomiędzy konkurujące procesy (aktywności, usługi, użytkowników, agentów) tak, aby osiągnąć najlepsze działanie odpowiedniego systemu jako całości i jednocześnie maksymalne zaspokojenie potrzeb poszczególnych procesów. Obok efektywności całego systemu, istotnym czynnikiem oceny rozdziału zasobów jest też minimalizacja nierówności (rozbieżności) pomiędzy wynikami przydziału dla realizacji poszczególnych procesów. Oznacza to sprawiedliwe, czyli bezstronne i równe traktowanie wszystkich konkurujących procesów (ang. fairness, equity). W złożonych systemach rozdział posiadanych zasobów nie musi bezpośrednio dotyczyć końcowych użytkowników (procesów) lecz może dotyczyć elementów systemu, których działanie ma wpływ na poziom obsługi poszczególnych użytkowników [1].

Rozpatrywane w pracy problemy optymalizacyjne ze szczególnym uwzględnieniem sprawiedliwości rozwiązania mają swoje odzwierciedlenie w zagadnieniach dotyczących alokacji ograniczonych zasobów na zadane zapotrzebowania, które przynoszą określony zysk. Przy różnych wartościach zysków związanych z alokacją jednostek zasobów w naturalny sposób występuje rywalizacja między wybranymi zapotrzebowaniami [2]. Oznacza to, że w przypadku uzyskania rozwiązania optymalnego w sensie Pareto, każda kolejna zmiana decyzji dotycząca zwiększenia przydziału zasobów do wybranego zapotrzebowania będzie wiązała się ze zmniejszeniem przydziału w co najmniej jednym innym zapotrzebowaniu. W ogólnym sformułowaniu, można tego typu zadania rozumieć jako problemy rozdziału zasobów ograniczonych (RZO) do zadanego zbioru zapotrzebowań. Szczególną grupą problemów decyzyjnych należących do tej grupy jest wymiarowanie sieci telekomunikacyjnych. Jest to grupa problemów optymalizacyjnych charakteryzująca się specyficznymi ograniczeniami opisującymi przepływ ruchu pomiędzy węzłami sieci. Oprócz podstawowych założeń umożliwiających prosty przepływ pakietów w sieci w zależności od przyjętych preferencji decydenta, w problemie sieciowym celem jest rozdział zasobu ograniczonego, jakim jest wartość obciążenia lub rezerwa przepustowości na zadanej ścieżce. Ścieżka jest rozumiana jako ciąg węzłów bądź łuków grafu, który umożliwia przepływ między źródłem a ujściem. W szczególnym przypadku jedna ścieżka może być związana z jednym

zapotrzebowaniem. Najczęściej jednak zapotrzebowanie jest realizowane przez kilka ścieżek, które mogą współdzielić ze sobą wybrane łuki bądź ulegać rozdzielaniu. Czynnikiem wpływającym w głównym stopniu na jakość połączenia jest zarezerwowana dla ścieżki przepustowość. W pracy ten rozdzielony na ścieżkach zasób będzie również określany wielkością obciążenia przypisanego do danego zapotrzebowania. Przyjęto, że na jednostkę przydzielanego na ścieżce obciążenia lub przepustowości przypada przychód jednostkowy. Każdy łuk grafu posiada również swoją pojemność, która nie może zostać przekroczona w procesie wymiarowania. W modelach optymalizacji sprawiedliwej występują dwa kryteria, wpływające na ocenę rozwiązania. Pierwszym kryterium jest maksymalizacja wartości sumarycznego przychodu z odpowiednio zwymiarowanej sieci. Drugim kryterium jest zapewnienie rozwiązania sprawiedliwego, tj. traktującego na równi każde z zapotrzebowań. Według takiego kryterium rozwiązanie, w którym chociaż jedna z wartości obciążeń na zadanych zapotrzebowaniach jest równa zero powinno zostać uznane za niesprawiedliwe. Do takiego przypadku może dojść w wyniku współdzielenia łuku, w przypadku grafów nieskierowanych – krawędzi, przez co najmniej dwie ścieżki realizujące dwa różne zapotrzebowania. Efekt ten jest bardziej widoczny, gdy pojemności współdzielonych łuków (lub krawędzi) zostaną widocznie mniejsze niż pozostałych łuków. Proces wymiarowania mający na celu maksymalizację przychodu z alokacji obciążenia na zapotrzebowaniach przydzieli całą pojemność współdzielonego łuku bardziej zyskownemu dyskryminując wszystkie mniej przychodowe. Sprawiedliwość w sieci telekomunikacyjnej może być wykorzystywana na przykład w platformach świadczących usługi streamingu mediów, takich jak video. W przypadku dużego obciążenia sieci, gdy z usług chce w jednym czasie korzystać wzmóżona grupa osób, sprawiedliwość jest bardzo istotnym kryterium optymalizacji [3].

Celem prac badawczych jest opracowanie algorytmów oraz metodyki pracy dla problemów alokacji zasobów ograniczonych do zadanych zapotrzebowań. W pracy przedstawione zostały modyfikacje metod takich jak Model Uporządkowanych Średnich Ważonych (OWA, z ang. Ordered Weighted Averages) oraz Model Punktu Odniesienia (RPM, z ang. Reference Point Method) oraz ich ocena pod kątem wybranych miar równości bądź nierówności. Zaproponowane zostanie również podejście związane z optymalizacją dwóch kryteriów, jakimi są: efektywność i sprawiedliwość. Nowoopracowany model ilorazowy wykorzystuje jako funkcję celu iloraz tych dwóch kryteriów. Przez umiejętne dobranie równań opisujących je możliwe jest wyznaczenie rozwiązania, które jest kompromisem pomiędzy wydajnością i sprawiedliwością rozwiązania. Model ilorazowy posiada w porównaniu do

istniejących modeli jeden lub dwa parametry sterujące, co czyni go bardziej użytecznym. W pracy zostały przedstawione trzy modele ilorazowe, które wykorzystują wybrane miary sprawiedliwości ujęte jako maksymalizacja lub minimalizacja funkcji kryterium. Do oceny badanych modeli zostały wybrane zarówno klasyczne miary nierówności wykorzystywane w statystyce, takie jak odchylenie standardowe, kurtoza, rozrzut, jak i miary sprawiedliwości znajdujące zastosowanie w problemach sieciowych, do których zaliczyć należy współczynnik Giniego [4], Jaina [5] oraz Hossfelda [6]. Pierwsza z wymienionych miar bazuje na odchyleniu krzywej Lorenza od linii odpowiadającej uporządkowanym wartościom skumulowanych wartości funkcji osiągnięcia rozkładu idealnie równego [7]. Druga miara, współczynnik Jaina jest miarą równomierności rozkładu wartości. W literaturze można znaleźć opracowania, które pozwalają stwierdzić że jest ona przydatna jako dobra miara sprawiedliwości rozwiązania [8]. Ważnym punktem badań jest również opracowanie i zastosowanie metod pozwalających na dobre przetworzenie wstępne danych wejściowych do zadania optymalizacji. W pracy przedstawiono analizę modeli optymalizacji sprawiedliwej testowanych na przykładzie topologii sieci mniej (kilkanaście, kilkadziesiąt węzłów) i bardziej rozbudowanych (ponad 300 000 węzłów). W przypadku tych zbiorów występował problem niespójności sieci, który został opisany w kolejnych rozdziałach pracy. Źródłem danych jest biblioteka dostępna w zasobach internet [9] oraz dane rzeczywiste zanonimizowane, pozyskane z zasobów Instytutu Łączności – Państwowego Instytutu Badawczego.

2 Sprawiedliwy rozdział zasobów ograniczonych (RZO)

2.1 Pojęcie sprawiedliwości, równości w odniesieniu do problemów optymalizacyjnych

Problemy decyzyjne związane z rozdział zasobów ograniczonych to grupa zadań, których celem jest rozdzielanie zasobów na konkurujące ze sobą zapotrzebowania. W wielu przypadkach rozdział zasobów powinna odbyć się w sposób, który jest z jednej strony sprawiedliwy, a z drugiej zapewnia określoną wydajność systemu. Należy w takich przypadkach zastosować modele wielokryterialne, które pozwalają na otrzymanie akceptowalnego rozwiązania. Modele jednokryterialne mające na celu jedynie maksymalizację wydajności całego systemu, wśród których występują mniej lub bardziej dochodowe zapotrzebowania, najczęściej będą dyskryminowały część z nich. Kryterium wydajności będzie preferowało alokację zasobów w taki sposób, aby sumaryczny zysk z ich alokacji był jak największy. Modele optymalizacji sprawiedliwej mają na celu jednocześnie uwzględnienie sprawiedliwości rozwiązania [10]. Takie modele traktują w sposób szczególny zapotrzebowania mniej atrakcyjne pod kątem wydajności. Najczęściej będzie to okupione pewną stratą względem rozwiązania jednokryterialnego, gdzie optymalizowana jest jedynie wydajność systemu. Dla poprawnie sformułowanego modelu optymalizacji wielokryterialnej gdzie uwzględniana jest miara sprawiedliwości oraz wydajność systemu, zawsze będzie istniała potrzeba znalezienia kompromisu między tymi przeciwstawnymi kryteriami.

Opisując problem bardziej dokładnie rozważmy zbiór zasobów/aktywności, które mogą być mierzalne w określony sposób. Mogą zostać opisane przez odpowiednią funkcję, która pozwala na porównanie wyników ich wykorzystania do odpowiednich usług, również określonych w zadaniu. Przykładem takiego zadania jest problem alokacji zasobów ludzkich na zadania, które są związane z prowadzonym projektem. Głównym kryterium jakości, w tym przypadku jest czas, zasobami pracownicy, natomiast usługami zadania w projekcie. W zadaniach alokacji często funkcje umożliwiające porównanie dla różnych zasobów są opisywane w odmienny sposób, poprzez przypisywanie im innej wagi lub charakteru monotoniczności. Na przykład przypisanie dwóch osób do zadania, może nie wpłynąć na dwukrotny wzrost wydajności pracy lub te same osoby przypisane do różnych zadań mogą wydłużyć lub skrócić całkowity czas projektu. W zadaniach optymalizacyjnych decydent może być zainteresowany zarówno maksymalizacją, jak również minimalizacją funkcji kryterium. O ile ograniczenia oraz opisane funkcje posiadają charakter liniowy, jak najbardziej możliwe

jest zastosowanie do nich modeli optymalizacji liniowej. Również, gdy na wartość funkcji kryterium wpływa więcej niż jedno kryterium. Oprócz wydajności takim dodatkowym czynnikiem jest miara sprawiedliwości lub równości rozwiązania. Pojęcie sprawiedliwości w zadaniach optymalizacyjnych, wywodzi się głównie z badań socjotechnicznych czy społeczno-politycznych, gdzie każda decyzja w większości przypadków ma wpływ na ogół [11]. W systemach społecznych ma to bardzo duże znaczenie, kiedy problem polega na rozdziale zasobów, które są ograniczone [12]. Aby zapewnić równość rozwiązania takiego zadania należy zaopatrzyć w usługi wszystkie podmioty w równym stopniu. Dobrym przykładem jest zadanie rozmieszczenie takich usług jak przychodnia czy straż pożarna na obszarze powiatu. To głównie służby publiczne i rozmieszczenie ich placówek dostępowych podchodzi pod kryterium sprawiedliwości. Problemy rozmieszczenia placówek specjalnego przeznaczenia przyjmują szczególne znaczenie w przypadku klęsk żywiołowych, gdzie pojęcie sprawiedliwości/równości rozpatrywane jest jako jedno z głównych kryteriów [13]. W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że istnieje subtelna różnica między pojęciami równości i sprawiedliwości, choć często ich miary są względem siebie proporcjonalne. Sprawiedliwy dostęp do wspomnianych placówek publicznych zakłada na przykład maksymalną wartość odległości dla każdego losowo wybranego obywatela. Równy dostęp zakłada dokładnie taką samą odległość dla każdego, co w oczywisty sposób w rozpatrywanym problemie jest nie do spełnienia [14]. Istnieją również przypadki, gdzie sprawiedliwość jest rozumiana zupełnie inaczej niż równość. Przykładem jest przypisanie uczniom ocen z testu. Idealnie równe rozwiązanie takiego zadania polegać będzie na przypisaniu każdemu takiej samej oceny, co najczęściej nie będzie sprawiedliwe.

Istnieje również grupa problemów decyzyjnych, w których sprawiedliwość stanowi jedno z głównych kryteriów. Są one związane z sytuacjami klęsk żywiołowych, które często charakteryzują się stosunkowo niskim prawdopodobieństwem wystąpienia, ale za to są bardzo dotkliwe w skutkach [15]. Obok sprawiedliwości rozumianej jako równość jako kryteria optymalizacji zaliczane są również wydajność oraz efektywność [16]. Jako wydajność rozumiane są cechy takie jak czas odpowiedzi, czas dojazdu, odległość, poziom bezpieczeństwa, niezawodność. Efektywność natomiast jest utożsamiana z kosztami, które mogą dzielić się na odpowiednie grupy.

Dla problemów RZO powstał szereg modeli pozwalających na uzyskiwanie rozwiązań sprawiedliwych. Uwzględniają one jednak tylko jedno kryterium nie zwracając szczególnej uwagi na kryterium wydajności. Problem alokacji zasobów ograniczonych można określić

w następujący sposób [17]. Załóżmy, że dany jest system, który świadczy zadany zbiór usług. Każda usługa może zostać zrealizowana w ograniczonym stopniu, którego miara jest dana. Określmy tę miarę jako jakość i -tego typu usługi, czyli na przykład czas jej wykonania, koszt, skala opóźnień lub zysk. Każda usługa może być świadczona (posiadać swoją alokację) na d -tym zapotrzebowaniu. Zbiór Q określa możliwe alokacje usług na poszczególne zapotrzebowania. Dla i -tej usługi funkcja $f_i(x)$ definiuje miarę jakości alokacji $x \in Q$. Funkcja ta jest określana jako funkcja celu. Problemy optymalizacyjne związane z alokacją ograniczonych zasobów zakładają najczęściej istnienie m usług, których zbiór opisany jest jako I . Usługi określane mogą być również mianem agentów, aktywności lub zasobów. W zadaniu opisany jest również zbiór Q , który zawiera w sobie kolejne wzorce alokacji, czyli możliwości decyzji, które mogą zostać podjęte wobec dostępnych usług. Funkcja $f_i(x) = y_i$ pozwala na zwrócenie wartości miary, która opisuje wpływ alokacji $x \in Q$ dla i -tej usługi. Najczęściej wartość tej funkcji opisuje kryterium jakości rozwiązania, na przykład czas, koszt, opóźnienie (minimalizacja) lub zysk, przepustowość/natężenie obsłużonego strumienia ruchu (maksymalizacja) itp. Dla zbioru usług $I = \{1, 2, \dots, m\}$ wprowadzony został również wektor, opisujący kolejne wartości funkcji osiągnięcia $\mathbf{f}(x)$. Dla wprowadzonego wektora który odwzorowuje przestrzeń decyzji $X = R^n$ na przestrzeń miar kryterium $Y = R^m$ oraz $Q \subset X$. Rozważając problem jednokryterialny, zapis wygląda następująco

$$\max\{\mathbf{f}(x) : x \in Q\} \quad (1)$$

Bardziej złożonym przypadkiem jest zadanie optymalizacyjne oparte na sieci zależności między możliwymi scenariuszami rozwiązań. Dla większej liczby rozpatrywanych usług, gdzie funkcje osiągnięcia wpływają na rozwiązanie w odmienny sposób, problem określany jest jako wielokryterialny. Można go zapisać w następujący sposób

$$\max\{y : y_i \leq f_i(x) \forall i, x \in Q, i \in I\} \quad (2)$$

W zadaniach optymalizacyjnych związanych z alokacją zasobów ograniczonych najczęściej stosowane podejście określone jest jako Pareto-optymalne. Rozwiązanie może być uznane według tego kryterium za optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy rozpatrując przestrzeń wektorów alokacji, nie można poprawić ani jednej wartości wektora bez pogorszenia innej. Problemy wielokryterialne uwzględniające koncepcję równości w sensie Pareto mogą zostać zdefiniowane również przez funkcję agregacji lub użyteczności. Zadania, które mogą wykorzystywać funkcję agregacji można zapisać jako

$$\max\{g(\mathbf{f}(\mathbf{x})): \mathbf{x} \in Q\} \quad (3)$$

Funkcje agregujące mogą być rozumiane jako na przykład wartość średnia przychodu ($\mu(\mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=1, \dots, m} y_i}{m}$), przychód całkowity ($T(\mathbf{y}) = \sum_{i=1, \dots, m} y_i$) lub miara najgorszej wartości alokacji ($M(\mathbf{y}) = \min_{i=1, \dots, m} y_i$), która jest wykorzystywana w koncepcji optymalizacji maximin, która spełnia warunek Pareto-optymalności i może zostać opisana w następujący sposób

$$\max\left\{\min_{i=1, \dots, m} f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\right\} \quad (4)$$

Koncepcja zakłada maksymalizację najgorszego wyniku funkcji kryterium za wszelką cenę. Kolejnym przykładem zadań związanych z alokacją zasobów jest problem plecakowy. Polega on na znalezieniu optymalnego zestawienia zasobów w alokacji ograniczonej z góry na przykład pojemnością, nośnością czy przepustowością. Pisząc bardziej dokładnie, problemem decyzyjnym jest wybór poszczególnych dóbr o określonej wartości, które posiadają swoją wagę oraz gabaryty w taki sposób, aby całkowita ich wartość była największa przy zachowaniu ograniczeń na masę oraz pojemność plecaka. Tak opisany problem posiada dyskretny zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Załóżmy że mamy do dyspozycji zbiór $I = \{1, \dots, m\}$ elementów o wadze a_i . Problem decyzyjny polega na znalezieniu takiej konfiguracji składu plecaka, aby nie zostało przekroczone ograniczenie na maksymalny udźwig plecaka oznaczony parametrem b . Zadanie polega na znalezieniu składu plecaka zawierającego jak największą liczbę rodzajów elementów. Idealnym rozwiązaniem jest więc znalezienie konfiguracji składu, w której znajduje się co najmniej po jednym elemencie każdego rodzaju. W przypadku kiedy możliwa jest rozdział kilku elementów każdego rodzaju, rozwiązanie będzie dążyło do osiągnięcia równomierności rozkładu elementów kolejnych rodzajów. Model optymalizacji max-min uwzględniający takie ograniczenia może zostać zapisany w następujący sposób

$$\max\left\{\min_{i=1, \dots, m} y_i : \sum_{i=1, \dots, m} a_i y_i \leq b\right\} \quad (5)$$

Zadanie polega więc na uzyskaniu maksymalnej liczby elementów każdego rodzaju y_i przy jednoczesnym zachowaniu równomiernego rozkładu. W powyższym zapisie należy zauważyć że $y_i = \frac{b}{\sum_{i=1, \dots, m} a_i} \forall i \in I$ [18]. Dla problemu plecakowego rozwiązanie max-min dąży zatem do osiągnięcia idealnie równego (sprawiedliwego) rozwiązania. Rozwiązanie idealnie równe

w tym przypadku oznacza jednakową liczbę elementów każdego rodzaju. W praktyce maksymalizacja najbardziej dyskryminowanej wartości funkcji osiągnięcia prowadzi do nieefektywnych rozwiązań. Jest to tym bardziej widoczne, gdy przestrzeń rozwiązań dopuszczalnych jest opisana przez wartości dyskretne oraz istnieje co najmniej jedna wartość, która jest szczególnie oddalona od średniej. Przykładem może być przypadek alokacji wybranego punktu usług publicznych (szpitala, remizy strażackiej, komisariatu, przychodni, itp.), w sposób zapewniający możliwie najszybszy dostęp dla każdego obywatela. Jest to w tym przypadku związane z odległością i to ta miara może być przedmiotem minimalizacji. Gdy rozmieszczenie miejsc stałego pobytu obywateli jest równomierne, model max-min w większości przypadków zwraca zadowalające rozwiązania. Sytuacja się komplikuje, gdy istnieją pojedyncze obiekty, które są znacząco oddalone od każdego z punktów obsługi bardziej niż większość. Podstawową wadą podczas stosowania metody max-min jest bowiem to, że metoda zwraca rozwiązanie, które jest idealnie równe dla wszystkich rozpatrywanych funkcji osiągnięcia i równe co do wartości maksymalnej alokacji najmniej efektywnej.

Rozpatrzmy kilka wektorów, które należą do zbioru wektorów rozwiązań dopuszczalnych: (2,2,2,2), (2,2,9,2), (2,2,2,9), (2,4,4,9). Rozwiązaniem zwróconym przez model max-min będzie w tym przypadku rozwiązanie pierwsze, które jest zdominowane przez wszystkie pozostałe. Modyfikacją modelu max-min pozwalającą na poprawę wydajności rozwiązania jest model, który w pierwszej kolejności zwraca rozwiązanie max-min, natomiast w drugim kroku, zachowując wartość minimalną zwiększa kolejne wartości w możliwie najbardziej efektywnej konfiguracji względem dominacji racjonalnej, to znaczy takiej w której każdy wektor, który posiada wartość większą lub równą, na odpowiedniej pozycji jest wektorem bardziej preferowanym. Rozpatrując wcześniej przedstawiony zbiór wektorów takim rozwiązaniem powinno być rozwiązanie czwarte. Aby to osiągnąć, należy dodać drugie kryterium optymalizacji związane z maksymalizacją wybranej funkcji agregującej (sumy lub wartości średniej), przypisując jej mniejszą wagę względem kryterium maksymalizacji wartości najmniejszej [19]. Taki model nazywany jest modelem leksykograficznego max-min i może zostać zapisany w następujący sposób

$$\text{lexmax}\left\{\min_{i=1,\dots,m} y_i, \sum_{i=1,\dots,m} y_i\right\} \quad (6)$$

Aby w jednoznaczny sposób porównać ze sobą wyniki otrzymane z kolejnych alokacji należy określić model preferencji, to znaczy sposobu porównania wektorów w celu określenia

rozwiązania preferowanego względem innych. Model preferencji może być określony za pomocą słabej preferencji oznaczanej symbolem \succcurlyeq , ścisłej preferencji \succ oraz równoznaczności \cong . Wymienione zależności spełniają następujące równania:

$$\mathbf{y}' \succ \mathbf{y}'' \Leftrightarrow (\mathbf{y}' \succcurlyeq \mathbf{y}'' \text{ oraz } \mathbf{y}' \not\cong \mathbf{y}''), \quad (7)$$

$$\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' \Leftrightarrow (\mathbf{y}' \succcurlyeq \mathbf{y}'' \text{ oraz } \mathbf{y}'' \succcurlyeq \mathbf{y}'). \quad (8)$$

Standardowy model preferencji zakłada, że słaba relacja preferencji jest:

- zwrotna: $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{y}$,
- przechodnia: $(\mathbf{y}' \succcurlyeq \mathbf{y}'' \text{ oraz } \mathbf{y}'' \succcurlyeq \mathbf{y}''') \Rightarrow \mathbf{y}' \succcurlyeq \mathbf{y}'''$,
- ściśle monotoniczna: $\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{e}_i \succ \mathbf{y}$ dla $\varepsilon > 0; i = 1, 2, \dots, m$.

Model preferencji racjonalnej posiada trzy wyżej wymienione cechy. Jest zwrotny, ponieważ każdy wektor alokacji \mathbf{y} nie może być gorszy od siebie samego, jest przechodni, to znaczy, że jeżeli wektor \mathbf{y}' jest preferowany względem wektora \mathbf{y}'' oraz wektor \mathbf{y}'' jest preferowany względem wektora \mathbf{y}''' to oznacza, że wektor \mathbf{y}' jest preferowany względem \mathbf{y}''' . Relacja ścisłej preferencji oznacza, że poprawa dowolnej wartości wektora \mathbf{y} o minimalną wartość (poprawa jakości dowolnej usługi), czyni ten wektor bardziej preferowanym. Rozwiązanie, które nie jest zdominowane według wyżej opisanej racjonalnej relacji preferencji, jest również rozwiązaniem optymalnym w sensie Pareto. W przypadku problemów związanych ze sprawiedliwością rozwiązania należy jednak wprowadzić dodatkowe ograniczenia pozwalające na otrzymanie rozwiązania preferowanego względem innych, natomiast dodatkowo uwzględniającego równomierny rozkład przydziałów usług na zadane zapotrzebowania. Należy przytoczyć w tym miejscu pojęcie preferencji anonimowej oraz wyrównującej, które ukierunkowują proces optymalizacji na rozwiązania bardziej sprawiedliwe spośród rozwiązań dominujących według racjonalnej relacji preferencji. Model anonimowej relacji preferencji zakłada, że żadne zapotrzebowanie nie jest w żadnym stopniu preferowane względem innych. Kryterium oceny jest w tym przypadku bezstronne i można je zapisać dla każdej permutacji π zbioru I jako następującą zależność

$$(\mathbf{y}_{\pi(1)}, \mathbf{y}_{\pi(2)}, \dots, \mathbf{y}_{\pi(m)}) \cong (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m) \quad (9)$$

Kolejnym krokiem w kierunku modelu preferencji ukierunkowanego na sprawiedliwość jest zasada wyrównywania wektora wynikowego, to znaczy dodanie własności pozwalającej na preferowanie wektorów, które mają bardziej zrównane wyniki względem tych, które posiadają

większe różnice wartości. Taką zależność można zapisać w postaci następujących implikacji dla modelu preferencji wyrównującej

$$y_{i'} > y_{i''} \Rightarrow \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''} > \mathbf{y} \text{ dla } 0 < \varepsilon < (y_{i'} - y_{i''})/2 \quad (10)$$

2.2 Miary nierówności wykorzystywane w modelach optymalizacji sprawiedliwej

Kryterium sprawiedliwości można w modelu uwzględnić na wiele sposobów. Powstało wiele koncepcji pozwalających uzyskać rozwiązanie dla problemów związanych ze sprawiedliwym rozdziałem zasobów. W większości z nich należy liczyć się z wykonaniem obliczeń kilkakrotnie dla różnych parametrów sterujących, aby uzyskać rozwiązanie, które odzwierciedla akceptowalny kompromis między rozwiązaniem optymalnym pod kątem wydajności oraz sprawiedliwością. Z punktu widzenia ergonomii najbardziej wskazane jest, aby parametrów sterujących było możliwie jak najmniej. Niektóre modele nie wymagają parametryzacji, co pozwala osiągnąć rozwiązanie szybciej, natomiast nie zawsze jest ono zadowalające dla decydenta. W wielu modelach optymalizacji sprawiedliwej określona jest miara sprawiedliwości, użyta do oceny rozwiązania. Aby uzyskać najlepszy efekt w modelu, powinna zostać ona uwzględniona w sposób bezpośredni jako część funkcji osiągnięcia bądź jako ograniczenie. Istnieje również możliwość wykorzystania specyficznych własności nierówności liniowych, które uwzględniają określony model preferencji (wyrównującej bądź anonimowej). W modelach optymalizacyjnych funkcją osiągnięcia lub funkcją celu nazywa się matematyczne sformułowanie, które wyraża miarę, według której oceniane jest rozwiązanie. Zazwyczaj problem decyzyjny dotyczy większej liczby procesów, które podlegają ocenie. Dlatego też podczas przedstawiania wyniku obliczeń powstałych w procesie optymalizacji mówimy o wektorze ocen. Każda kolejna wartość wektora dotyczy procesu, któremu przydzielana jest określona liczba dostępnych zasobów. W modelach wielokryterialnych kryteria oceny mogą być uwzględniane na poziomie samej optymalizowanej funkcji, bądź brane pod uwagę przy odpowiednio zdefiniowanych ograniczeniach. Każdy model składa się więc z ciągu ograniczeń oraz funkcji kryterium, w których podstawowym założeniem jest nie występowanie zmiennych decyzyjnych w potęgze innej niż pierwszego stopnia. Za nieliniowość uważany jest również iloczyn co najmniej dwóch zmiennych. Modelowanie z wykorzystaniem języka programowania liniowego wiąże się więc często z trudnościami

podczas zapisu ograniczeń, które często muszą być zapisywane w postaci wielu równań i przekształceń. Zasadniczą zaletą modeli liniowych jest jednak stosunkowo niska złożoność obliczeniowa, co wpływa na niski czas potrzebny na generację wyniku, a więc ich wydajność. Ten obszar jest ciągle rozwijany w obszarze nauk ścisłych, gdzie znaleźć można coraz to bardziej rozbudowane modele optymalizacji przystosowane do rozwiązywania różnych problemów decyzyjnych.

W analizie systemowej sprawiedliwość zwykle jest opisywana za pomocą tak zwanych miar sprawiedliwości (lub miar równości / nierówności). Można je wyrazić za pomocą funkcji ρ , mapujących wektor \mathbf{y} na (nieujemne) liczby rzeczywiste. Wektor \mathbf{y} oznacza kolejne wartości funkcji osiągnięcia odzwierciedlające kolejne alokacje zasobów na zadane zapotrzebowania. Typowe miary nierówności są rozumiane jako wartości odchylenia od normy. Są niezmiennicze w tym sensie, że $\rho(\mathbf{y} + a\mathbf{e}) = \rho(\mathbf{y})$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a (gdzie \mathbf{e} to wektor jednostkowy $(1, \dots, 1)$), który nie wpływa na przesunięcie skali wyników. Miary nierówności są równe 0 dla idealnie równych wyników oraz przyjmują wartości nieujemne [20]. Często są one nie większe niż 1. Większa wartość wskazuje na bardziej nierówny charakter rozkładu wartości analizowanego wektora. Analogicznie opracowane zostały miary równomierności rozkładu, które zachowują się dokładnie odwrotnie. Podczas budowy modelu wykorzystywane są miary zarówno z jednej jak i drugiej grupy w zależności od przyjętej koncepcji. Wybór odpowiedniej miary statystycznej jest bardzo istotny, Powinien on jak najlepiej opisywać istotę tego kryterium. Poniżej przedstawione zostały wybrane miary statystyczne, które pozwalają na bardziej lub mniej dokładny opis kryterium sprawiedliwości rozumianego jako odchylenie poszczególnych wartości alokacji zasobów na zapotrzebowaniach [21]. Przyjmijmy, że problem decyzyjny jest związany z alokacją ograniczonych zasobów na zbiór zapotrzebowań D , gdzie $d = 1, \dots, m$. Wartość miary, odpowiadającej zarezerwowanej przepustowości dla kolejnych zapotrzebowań jest opisana przez wektor \mathbf{y} . Funkcję określającą średnią z wartości wektora ocen oznaczono jako $\mu(\mathbf{y})$. Najprostsze miary nierówności są oparte na bezwzględnym pomiarze rozpowszechnienia wyników, takich jak:

- maksymalna różnica bezwzględna

$$\Delta_{\max}(\mathbf{y}) = \max_{d,i \in D} (|y_d - y_i|) \quad (11)$$

- średnia różnica bezwzględna

$$\bar{\Delta}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2m^2} \sum_{d \in D} \sum_{i \in D} |y_d - y_i| \quad (12)$$

Kolejna grupa miar bazuje na odchyleniach od wartości średniej rozkładu, takich jak:

- maksymalne odchylenie bezwzględne

$$\sigma_{\max}(\mathbf{y}) = \max_{d \in D} (|y_d - \mu(\mathbf{y})|); \quad (13)$$

- średnie odchylenie bezwzględne

$$\bar{\sigma}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} |y_d - \mu(\mathbf{y})| \quad (14)$$

Kolejną miarą jest odchylenie standardowe σ , które opisuje miarę rozrzutu jako średnią z poszczególnych odchyłeń od wartości średniej. Miara ta zapisywana jest w następujący sposób

$$\sigma^2(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} (y_d - \mu(\mathbf{y}))^2 = \frac{1}{2m^2} \sum_{d \in D} \sum_{i \in D} (y_d - y_i)^2 \quad (15)$$

W problemach decyzyjnych AZO często jako miarę sprawiedliwości przyjmuje się wartości stanowiące dolne lub górne odchylenia od wartości średniej. Mówimy wtedy o miarach takich jak:

- średnie semi-odchylenie dolne

$$\bar{\delta}_-(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} (\mu(\mathbf{y}) - y_d)_- \quad (16)$$

- średnie semi -odchylenie górne

$$\bar{\delta}_+(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} (\mu(\mathbf{y}) - y_d)_+ \quad (17)$$

- semi-odchylenie standardowe dolne

$$\bar{\sigma}_-(\mathbf{y}) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{d \in D} (\mu(\mathbf{y}) - y_d)_-^2} \quad (18)$$

- semi-odchylenie standardowe górne

$$\bar{\sigma}_+(\mathbf{y}) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{d \in D} (\mu(\mathbf{y}) - y_d)_+^2} \quad (19)$$

- maksymalne odchylenie dolne

$$\Delta_-(\mathbf{y}) = \max_{d \in D} (\mu(\mathbf{y}) - y_d) \quad (20)$$

- maksymalne odchylenie górne

$$\Delta_+(\mathbf{y}) = \max_{d \in D} (y_d - \mu(\mathbf{y})) \quad (21)$$

W powyższych wzorach $(\cdot)_+$ oraz $(\cdot)_-$ oznacza odpowiednio nieujemną lub niedodatnią część wartości. Powyższe miary są jednak w większości niemożliwe bądź trudne do zapisu w postaci równań lub nierówności liniowych. Współczynnikiem często stosowanym w ekonomii, a zarazem prostym w implementacji w modelu liniowym jest współczynnik Giniego [4]. Indeks Giniego $G(\mathbf{y})$, dla posortowanego wektora ocen \mathbf{y} można wyrazić wzorem

$$G(\mathbf{y}) = \frac{\sum_{d=1}^m (2d - m - 1)y_d}{m^2 \mu(\mathbf{y})} \quad (22)$$

Jako miara nierówności w procesie optymalizacji jego wartość będzie ulegała procesowi minimalizacji. W modelach, gdzie została przyjęta koncepcja maksymalizacji współczynnika stosowany jest wskaźnik Jaina $J(\mathbf{y})$. Jego wykorzystanie jest spotykane w literaturze również do problemów alokacji zasobów ograniczonych [5]. Przyjmuje on wartości od 0 do 1, przy czym wartość 1 wskazuje na rozkład idealnie równy i jest opisywany wzorem

$$J(\mathbf{y}) = \frac{(\sum_{d=1}^m y_d)^2}{m \sum_{d=1}^m y_d^2} \quad (23)$$

Współczynnik Giniego jest jedną z miar szeroko stosowanych w ekonomii w celu określenia nierównomierności rozkładu określonej miary i może być stosowany w wielu przypadkach problemów decyzyjnych. Pracując z modelami optymalizacji, indeks Giniego może być wykorzystywany w szerokim zakresie problemów, w których kryterium sprawiedliwości należy brać pod uwagę równoległe z efektywnością systemu [22]. Na

przykład można go dostosować do zagadnień związanych z transportem, logistyką, problemami z alokacją skończonego zbioru zasobów i wieloma innymi. Za wyjątkiem tylko wspomnianych przykładów zastosowania zbadanych modeli, modele optymalizacji sprawiedliwej są szeroko stosowane w zadaniach wymiarowania sieci.

W ekonomii zwykle stosuje się względne wskaźniki nierówności znormalizowane przez średni wynik, inaczej zwane również indeksy czy współczynniki [23]. Najczęściej spotykanym jest wspomniany indeks Giniego, który odpowiada względnej różnicy średniej. Jako miara oceny równomierności rozkładu wartości rozwiązania, często stosowany jest również, rozpatrywany w problemach sieciowych wskaźnik Jaina ($J(\mathbf{y})$). Przyjmuje on wartości od 0 do 1, przy czym wartość 1 wskazuje na rozkład idealnie równy. Można go interpretować jako znormalizowaną średnią kwadratową. Łatwo zauważyć, że bezpośrednia optymalizacja indywidualnych wyników skutkuje równymi lecz bardzo niskimi wynikami pod kątem wydajności systemu. Dotyczy to wszystkich miar równomierności (bądź nierównomierności) rozkładu. Ta sprzeczność nie może zostać całkowicie rozwiązana za pomocą standardowego średniego modelu dwukryterialnego, który uwzględnia zarówno efektywność, rozumianą jako optymalizację średniego wyniku oraz sprawiedliwość rozumianą jako minimalizacja miary nierówności (np. $G(\mathbf{y})$) lub maksymalizacja miary równości (np. $J(\mathbf{y})$).

Kolejnym współczynnikiem stosowanym do oceny równomierności rozkładu wartości wektora ocen jest współczynnik Hossfelda [6] określony wzorem

$$F(\mathbf{y}) = 1 - \frac{2\sigma^2(\mathbf{y})}{\max(\mathbf{y}) - \min(\mathbf{y})} \quad (24)$$

Współczynnik ten przyjmuje wartości od 0 do 1, gdzie 1 oznacza rozkład idealnie równomierny. Wartości $\max(\mathbf{y})$ oraz $\min(\mathbf{y})$ we wzorze oznaczają odpowiednio największą oraz najniższą wartość elementu wektora ocen. Współczynnik wykazuje wiele pozytywnych własności, wśród których wymienić można bazowanie na wartości bezwzględnej odchylenia standardowego.

Podczas pracy z modelami optymalizacji sprawiedliwej, stosowane jest również podejście, w którym o stopniu sprawiedliwości rozwiązania informują miary odnoszące się do zadanej liczby najmniejszych (lub największych wartości) wektora ocen. Matematyczny opis tych wartości może zostać opisany jako średnia k -największych (lub najmniejszych)

półodchyleń od średniej wartości funkcji kryterium: $\Delta_k(\mathbf{y}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu(\mathbf{y}) - \theta_i(\mathbf{y}))$, gdzie może to zostać uogólnione do $\Delta_{\beta(\mathbf{y})}$ dla każdej wartości $0 < \beta \leq 1$ jako

$$\Delta_{\beta}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} (\mu(\mathbf{y}) - F_y^{(-1)}(\alpha)) d\alpha \quad (25)$$

Funkcja kwantylowa F_y , wykorzystana w powyższym wzorze jest definiowana jako

$$F_y^{(-1)}(\beta) = \inf\{\eta: F_y(\eta) \geq \beta\} \quad \text{dla } 0 < \beta \leq 1 \quad (26)$$

i jest interpretowana jako funkcja odwrotna do dystrybuanty

$$F_y(t) = \sum_{i \in D} \frac{1}{m} \delta_i(t) \quad \text{gdzie } \delta_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y_i \leq t \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases} \quad (27)$$

Dystrybuanta $F_y(t)$ dla jakiegokolwiek rzeczywistej (wynikowej) wartości t zapewnia miarę wyników mniejszą lub równą t . Ponadto, z relacji dualności wynika, że najgorsze warunkowe β -procentowe wybory najbardziej dyskryminowanych wartości, można uznać za optymalne rozwiązanie następującego problemu

$$\min\left\{ \sum_{d \in D} \frac{1}{m} y_d - y + \frac{1}{\beta} \sum_{d \in D} \frac{1}{m} (y - y_d)_+ : \mathbf{y} \in Q \right\} \quad (28)$$

Podstawienie $\beta = i/m$ pozwala na otrzymanie modelu minimalizacji

$$\min\left\{ \sum_{d \in D} \frac{1}{m} y_d - y + \frac{1}{i} \sum_{d \in D} \frac{1}{m} (y - y_d)_+ : \mathbf{y} \in Q \right\} \quad (29)$$

Określając poziom sprawiedliwości należy przyjąć miarę pozwalającą na jego ocenę. Założono również, że w przypadku gdy co najmniej jedna ze zmiennych określająca wartość alokacji dla zapotrzebowania posiada wartość 0, to rozwiązanie nie jest sprawiedliwe. Idąc dalej, sprawiedliwość rozwiązania będzie coraz większa, gdy wyniki będą jak najbardziej zrównane ze sobą. W statystyce do takich miar należą wariancja, odchylenie standardowe lub kurtoza. Do ich wyznaczenia wykorzystywane są jednak zależności nieliniowe (na przykład mnożenie zmiennych), co przekreśla możliwość ich bezpośredniego wykorzystania podczas implementacji modelu optymalizacji. Mogą one jednak być wykorzystywane do oceny wyniku

końcowego badanej metody. Jakość wyniku uzyskanego przy pomocy danej metody może być również oceniana przez wyznaczenie współczynnika określającego stratę procentową wartości sumarycznego zysku osiągniętego, przy wykorzystaniu danego modelu sprawiedliwej optymalizacji do wartości zysku uzyskanego przy wykorzystaniu metody nieuwzględniającej sprawiedliwości. Kryterium sprawiedliwości w większości przypadków jest obciążone pogorszeniem wydajności rozwiązania. W analizie systemowej, w celu porównania uzyskanych rozwiązań z zastosowanych modeli stosowany jest współczynnik określający stratę spowodowaną zastosowaniem modelu sprawiedliwego do rozwiązania modelu jednokryterialnego maksymalizującego wydajność systemu [18]. Taka procentowa strata na wydajności związana z zastosowaniem modelu optymalizacji sprawiedliwej nosi miano kosztu sprawiedliwości (POF – z ang. Price of Fairness) [1] oraz określana jest następującym wzorem

$$\text{POF}(\mathbf{y}) = \frac{\text{MAX}(\mathbf{y}) - \text{FAIR}(\mathbf{y})}{\text{MAX}(\mathbf{y})} 100 [\%] \quad (30)$$

gdzie:

$\text{POF}(\mathbf{y})$ - koszt rozwiązania sprawiedliwego na danym poziomie sprawiedliwości;

$\text{MAX}(\mathbf{y})$ – wartość miary określającej wydajność rozwiązania optymalnego zadania jednokryterialnego, nieuwzględniającego kryterium sprawiedliwości;

$\text{FAIR}(\mathbf{y})$ - rozwiązanie uzyskane przy pomocy analizowanego modelu wielokryterialnego uwzględniającego sprawiedliwość.

Koszt sprawiedliwości jest przedmiotem analiz w przypadku wielu problemów związanych z rozdzielaniem zasobów ograniczonych. Są nimi na przykład problemy sieciowe, w których zadanie optymalizacji w którym tymi zasobami jest rezerwowana przepustowość, obciążenie łączy [24].

W celu lepszego zrozumienia problemu, rozważmy problem alokacji punktu pomocy medycznej na danym przykładowym obszarze, na którym określono sześć punktów kontrolnych. Zadanie polega na umieszczeniu stacjonarnego punktu pomocy w miejscu, które będzie możliwie najmniej oddalone od każdego z punktów kontrolnych. Zmniejszenie odległości do wybranego punktu może za sobą pociągać zwiększenie odległości od innego punktu kontrolnego. W tabeli poniżej przedstawiono sześć przykładowych scenariuszy określających miejsca, gdzie możliwe jest umieszczenie rozpatrywanego punktu pomocy

medycznej. Każdy rozdział zasobu, jakim jest punkt pomocy medycznej, jest umiejscowiona w podanych odległościach od punktów kontrolnych. Zmienną decyzyjną w przedstawionym przykładzie jest odległość od punktu kontrolnego, która przyjmuje wartości dyskretne dla analizowanych scenariuszy.

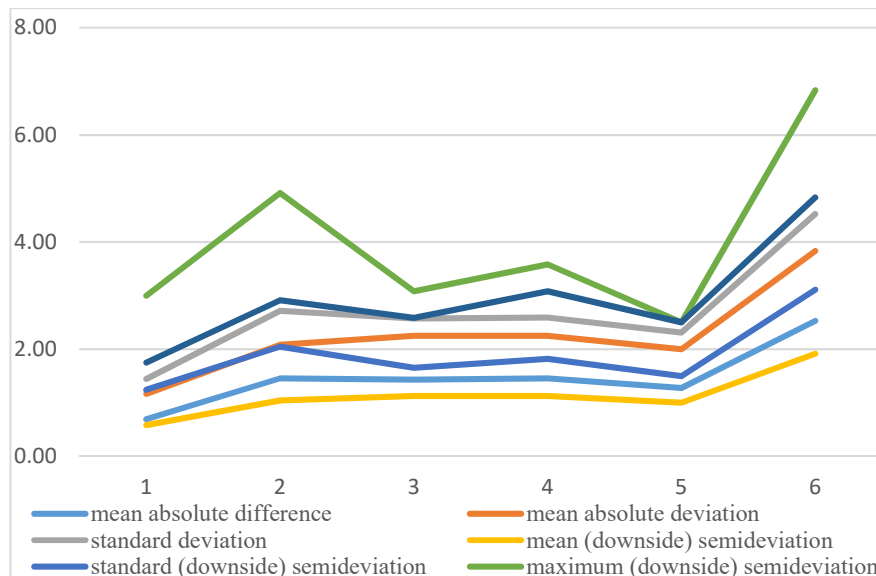
Tabela 1 Wyniki obliczeń wybranych miar statystycznych dla sprawiedliwości na przytoczonym przykładzie problem decyzyjnego.

Scenariusz rozwiązania	1	2	3	4	5	6
Odległość od punktu kontrolnego nr 1 [km]	6	4.5	3.5	10.5	9	0
Odległość od punktu kontrolnego nr 2 [km]	6	4	6	11	10	5
Odległość od punktu kontrolnego nr 3 [km]	2	0	2.5	8	5.5	4
Odległość od punktu kontrolnego nr 4 [km]	6	8	10	5	6.5	13
Odległość od punktu kontrolnego nr 5 [km]	5.5	8	7.5	4	4	12
Odległość od punktu kontrolnego nr 6 [km]	4.5	5	4	7	4	7
Średnia różnica bezwzględna	0.69	1.46	1.43	1.46	1.28	2.53
Średnie bezwzględne odchylenie	1.17	2.08	2.25	2.25	2.00	3.83
Odchylenie standardowe	1.44	2.71	2.57	2.59	2.31	4.52
średnie (górne) semiodchylenie	0.58	1.04	1.13	1.13	1.00	1.92
standardowe (górne) semiodchylenie	1.24	2.05	1.65	1.82	1.50	3.11
Maksymalne (górne) semiodchylenie	3.00	4.92	3.08	3.58	2.50	6.83
k największych semiodchylen (50%)	1.00	2.08	2.25	2.25	2.00	3.83
k największych semiodchylen (33%)	1.75	2.92	2.58	3.08	2.50	4.83

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawiona tabela pozwala wyznaczyć przebieg zmian poszczególnych wartości miar nierówności. Rezultaty dla 6 założonych scenariuszy zostały również przedstawione na wykresie poniżej. Zaobserwować można, że w większości przypadków wykorzystania miar nierówności charakteryzują się one podobnym charakterem monotoniczności, natomiast niektóre z nich są bardziej czułe na zmiany, niektóre mniej. Ten przykład pozwala na porównanie wartości miar sprawiedliwości. W zależności od rozpatrywanego problemu alokacji lepsze są miary, które bazują na ograniczonej liczbie zapotrzebowań. Dla rozpatrywanego w pracy przypadku alokacji ograniczonych zasobów na zapotrzebowaniach w systemie lepszymi do wykorzystania miarami zdają się być miary bazujące na określonej

liczbie zapotrzebowań najbardziej dyskryminowanych przez kryterium wydajności. Często te zapotrzebowania wiążą się z mniejszym zyskiem z przydzielenia im zasobów. Oczywiście ostateczny wybór rozwiązania leży w gestii decydenta, który sam określa, w jakim stopniu jest on skłonny do rezygnacji z całkowitej wydajności systemu względem zwiększenia sprawiedliwości rozwiązania.



Rys. 1 Wyniki obliczonych miar dla przykładu rozmieszczenia punktów medycznych

Źródło: opracowanie własne.

Stosowane modele optymalizacji pozwalają na uzyskanie rozwiązania przy zadanych parametrach wejściowych. Często ich odpowiedni dobór gwarantuje poprawność rozwiązania, a droga do najlepszej konfiguracji tych parametrów jest poprzedzona wielokrotnym wykonaniem obliczeń testowych dla różnych scenariuszy. Podczas opracowywania algorytmów, które są głównym rezultatem badań opisanych w pracy, jednym z celów było uproszczenie tego procesu przez ograniczenie parametrów sterujących oraz szybkie uzyskanie spektrum rozwiązań od mniej efektywnych oraz bardziej sprawiedliwych do maksymalnie efektywnych i mniej sprawiedliwych.

W literaturze występują liczne opracowania modeli optymalizacji sprawiedliwej, gdzie sprawiedliwość jest opisana przy pomocy określonych miar równości lub nierówności, które zostały dokładnie opisane w poprzednim rozdziale. Aby lepiej zrozumieć istotę problemu decyzyjnego, w którym szczególnie uwzględniona powinna być sprawiedliwość (równość) rozwiązania, przytoczony został przykład ilustrujący problem decyzyjny, polegający na rozdzieleniu zasobów na dwie możliwe alokacje. Posiadając 150 jednostek można przydzielić

posiadany zasób według następujących scenariuszy: $f(x_1) = (100, 50)$ oraz $f(x_2) = (80, 70)$. W przypadku drugiego scenariusza należy stwierdzić, że jest on bardziej sprawiedliwy, biorąc pod uwagę miarę równości jako współczynnik sprawiedliwości. Ten wybór, podjęty intuicyjnie znajduje swoje odzwierciedlenie również w teorii związanej z warunkiem transferu Pigou-Dalton'a [20]. Mówi ona, że każdy rozdział, która powiększa mniejszą alokację kosztem większej w celu ich wyrównania, prowadzi do bardziej sprawiedliwego rozwiązania. Jednym z zadań związanych z problemem alokacji zasobów ograniczonych jest również przytoczony wcześniej problem plecakowy. Tego typu zadanie można rozwiązać na wiele sposobów o różnym stopniu sprawiedliwości. Problemy alokacji zasobów ograniczonych można napotkać w wielu innych obszarach takich jak kierowanie ruchem drogowym, harmonogramowanie pracy czy inne szeroko pojęte problemy alokacji. Szczególnym przypadkiem problemów związanych z alokacją zasobów ograniczonych są zadania dotyczące rozmieszczenia budynków pełniących funkcję schronienia w wypadku katastrof i klęsk żywiołowych [12]. W pracy autorzy rozpatrują model stochastyczny uwzględniający kryterium dostępności schronisk dla każdego obywatela na równym poziomie przy zadanych ograniczeniach na ich budowę. Zadanie uwzględnia liniową kombinację średniej odległości pomiędzy lokalizacjami schronisk, a lokalizacjami przydzielonych do nich osób. Współczynnikiem określającym stopień sprawiedliwości rozwiązania może być w tym przypadku współczynnik Giniego, policzony dla tych odległości lub z miar wymienionych na początku rozdziału. Tego typu zadanie można rozwiązać przy wykorzystaniu istniejących modeli programowania liniowego lub algorytmów heurystycznych. Jeżeli zadanie osiąga większe rozmiary, jedyną alternatywą jest wykorzystanie drugiego z wyżej wymienionych, na przykład algorytmu genetycznego. W innych opracowaniach, dotyczących alokacji zasobów w bardziej rozbudowanych problemach można napotkać również algorytmy heurystyczne bazujące na symulowanym wyżarzaniu. Dotyczy to na przykład problemów alokacji zasobów spektralnych w elastycznych sieciach światłowodowych [25], [26], [27], [28].

Rozpatrując problem RZO, patrząc na problem z perspektywy użytkownika systemu, każda z możliwych alokacji zasobu powinna być traktowana w równy sposób. Ten punkt widzenia nie bierze pod uwagę kryterium wydajności. Każde zapotrzebowanie, bez względu na to jakie przynosi korzyści dla systemu, jest więc maksymalizowane. Takie jednokryterialne zadanie sprowadza się do zadania maksymalizacji najmniejszej wartości funkcji osiągnięcia i jest powszechnie uważane za maksymalnie sprawiedliwe. Model, który dodatkowo jeszcze maksymalizuje alokacje zasobów na pozostałych zapotrzebowaniach nazywany jest Max-min

Fairness [29] (MMF). Rozwiązanie uwzględnia maksymalizację najbardziej dyskryminowanego zapotrzebowania lecz w drugiej kolejności maksymalizuje wartości pozostałych, zapewnia optymalność rozwiązania w sensie Pareto. Oznacza to, że przy takim rozwiązaniu nie można już zwiększyć żadnej z pozostałych wartości funkcji osiągnięcia bez jednoczesnego zmniejszania innych. Z pewnością przydzielenie zasobów w celu optymalizacji najmniej efektywnego zapotrzebowania może spowodować znaczne pogorszenie ogólnej wydajności systemu, a tym samym zmniejszyć całkowitą wartość przychodów z alokacji zasobów [30]. Warunkuje to potrzebę zarządzania systemem w taki sposób, aby uwzględniać dwa sprzeczne cele jednocześnie: zwiększenie przychodów (alokacji na bardziej dochodowych zapotrzebowaniach) i zapewnienie sprawiedliwości (zagwarantowanie pewnej wartości alokacji zasobów zapewniającej wymagany poziom jakości). Kryterium sprawiedliwości często pojawia się w wielu innych przypadkach zadań rozdziału zasobów ograniczonych. Na przykład mogą to być problemy z alokacją zasobów publicznych. Każda osoba chce mieć jak najwyższy możliwy dostęp do towarów, takich jak opieka zdrowotna, bezpieczeństwo, transport publiczny i wiele innych zasobów publicznych finansowanych z podatków. W tej dziedzinie powstało wiele prac badawczych w zakresie teorii sprawiedliwości [31]. Kryterium to jest bardzo istotne również podczas podejmowania decyzji w zakresie działań rządowych. W dzisiejszych czasach idee te są aktualne w debatach, szczególnie w przypadku podejścia demokratycznego. Modele nieuwzględniające modelu preferencji anonimowej i/lub wyrównującej nie pozwalają się jednak sterować lub pozwalają na to w bardzo ograniczonym stopniu. Czyni to je bardzo nieefektywnymi, a rozwiązania, które są uzyskiwane przy ich pomocy są często nieakceptowalne dla decydenta. Takimi metodami są na przykład metoda MMF (z ang. Max-min fairness)

$$\max\left\{\left(\min_{d \in D} f_d(x) + \varepsilon \sum_{d \in D} f_d(x)\right) : x \in Q\right\} \quad (31)$$

lub lexMAX wykorzystująca maksymalizację (lub minimalizację) leksykograficzną

$$\text{lexmax}\left(\left\{\min_{d \in D} f_d(x)\right\}, \varepsilon \sum_{d \in D} f_d(x) : x \in Q\right) \quad (32)$$

Ogólna idea przyjęta w powyższych modelach polega na maksymalizacji „za wszelką cenę” wartości funkcji najbardziej dyskryminowanych, a w drugiej kolejności sumy wszystkich

wartości wektora ocen, przemnożonej przez odpowiednio mały współczynnik ε . Pierwszy z wymienionych modeli daje w większości wyniki zdominowane. Z tego powodu preferowanym modelem jest model drugi oparty na maksymalizacji leksykograficznej, która w pierwszej kolejności przyjmuje wynik optymalizacji opartej na podejściu max-min, natomiast w drugiej fazie maksymalizuje wszystkie wartości funkcji tam, gdzie to tylko możliwe. To gwarantuje uzyskanie rozwiązania niezdominowanego racjonalnie. W przypadku maksymalizacji alokacji obciążeń w sieci, rozwiązanie osiągnięte przy tym podejściu zostanie osiągnięte, gdy najmniej dochodowe zapotrzebowanie osiągnie maksymalną wartość. Dokładne opracowanie modelu optymalizacji liniowej bazującego na podejściu leksykograficznego max-min napotkać można w przytaczanej już wcześniej pracy [18]. Modele optymalizacji wielokryterialnej opartej na Max-min Fairness wymagają użycia specjalnych ograniczeń gwarantujących w każdym kroku, że optymalizowana funkcja kryterium porównuje ze sobą skumulowane wartości uporządkowanych wektorów wartości przydzielanych zasobów. Ma to bezpośredni związek z wymaganiem uwzględnienia dla każdego modelu sprawiedliwego dominacji anonimowej lub wyrównującej.

Modele MMF oraz lexMAX są w teorii bardzo zbliżone do siebie, natomiast różnią się między sobą w detalach. Modele ze względu na swoją prostą implementację jest szeroko stosowany na przykład w problemach sieciowych, tam gdzie istotną rolę odgrywa kryterium sprawiedliwości. Rozwiązanie optymalne według kryterium MMF musi spełniać dwa założenia [20], [32]. Założenie pierwsze brzmi następująco. Rozwiązanie jest optymalne wg. MMF, jeśli powiększenie jednej z wartości wektora odbywa się kosztem pomniejszenia innej. Założenie drugie zakłada natomiast, że rozwiązanie jest optymalne wg. MMF, jeśli pomniejszenie wybranej wartości wektora pociąga za sobą powiększenie innej, aktualnie większej wartości.

Podejście zaproponowane w modelu leksykograficznego max-min polega na określeniu hierarchii kolejnych wartości wektora funkcji kryterium, gdzie pierwszą wartością jest wartość rozwiązania max-min, natomiast drugą sumą wszystkich wartości dla poszczególnych alokacji. Rozwiązanie osiągnięte przez ten model gwarantuje otrzymanie rozwiązania optymalnego pod względem Pareto. Rozważmy przykład, gdzie w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych istnieją dwa wektory $\mathbf{a}=(1,3)$ oraz $\mathbf{b}=(3,1)$. W takim przypadku żaden z nich nie spełnia założenia zaproponowanego w definicji 1. Wektor \mathbf{a} nie jest rozwiązaniem MMF, ponieważ wektor \mathbf{b} zwiększa pierwszą współrzędną jednocześnie pomniejszając drugą. Żaden z tych dwóch wektorów nie jest więc optymalnym w sensie MMF. Analizując te wektory pod względem

kryterium leksykograficznego max-min, wartość wektora funkcji kryterium dla wektorów \mathbf{a} oraz \mathbf{b} byłaby równa i wyniosłaby (1, 3). Daje to rozwiązanie optymalne z punktu widzenia optymalizacji leksykograficznej, które jest jednakowe dla wektora \mathbf{a} oraz \mathbf{b} .

Rozważmy drugi przypadek, gdzie istnieją wektory $\mathbf{a}=(2,3)$, $\mathbf{b}=(3,3)$ oraz $\mathbf{c}=(5,2)$. Dla takich wektorów rozwiązaniem optymalnym z punktu widzenia MMF jest wektor \mathbf{b} , który zgodnie z optymalizacją leksykograficzną będzie zdominowany przez wektor \mathbf{c} . Jak widać na powyższym przykładzie, podejście MMF może nie zwracać odpowiednio wydajnego rozwiązania. W jednym i drugim przypadku optymalizowana jest najgorsza ocena. Różnica w opisanych modelach polega jednak na charakterze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, gdzie istotną rolę odgrywa założenie, że rozpatrywany obszar jest określony jako zbiór punktów o dyskretnych współrzędnych. Model MMF dobrze się sprawdza, gdy obszar rozwiązań dopuszczalnych jest opisany przez zbiór wypukły oraz zamknięty. Przytoczmy bowiem drugi przykład, gdzie porównywane są dwa wektory $\mathbf{a}=(4,4,9)$ oraz $\mathbf{b}=(5,4,6)$, gdzie występują trzy alokacje, które są równie atrakcyjne. Porównując sumę wartości bardziej atrakcyjny jest wektor \mathbf{a} . Według modelu lexMAX wybrany jednak zostanie wektor \mathbf{b} . W modelu najpierw nastąpi posortowanie wartości wektora od najmniejszej do największej. W ten sposób otrzymamy $\mathbf{a}_2=(4,4,9)$ oraz $\mathbf{b}_2=(4,5,6)$. W pierwszej kolejności porównywane są pierwsze współrzędne. W przypadku kiedy są one równe, porównywane są drugie wartości wektorów. Tutaj wektor \mathbf{b} posiada większą wartość niż \mathbf{a} , co spowoduje wybór wektora, którego suma wartości współrzędnych, bądź też ich średnia są mniejsze. Jest to przykład, kiedy to pod kątem sprawiedliwości można rozwiązania ocenić jako równie sprawiedliwe, natomiast pod względem kryterium wydajności zostało wybrane rozwiązanie mniej efektywne. Prosty pod względem implementacyjnym model lexMAX okazuje się więc nie zawsze wystarczająco wydajny, co jest również motywacją do prac nad modelami bardziej efektywnymi w tym zakresie. Minimaksymalizacja Leksykograficzna była rozpatrywana w teorii gier, gdzie zakładała wybór optymalnej strategii przy założeniu nieoptymalnej gry przeciwnika. W zadaniach tego typu zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem jest wielościennym zbiorem wypukłym, a funkcje ocen mają charakter liniowy. Pod tym względem zadania oparte na analizie gier macierzowych można wykorzystać między innymi do analizy zagadnień projektowania sieci telekomunikacyjnych. W tym obszarze jednak bardzo często ze względu na ilość równań opisujących ograniczenia wymagane jest zastosowanie metody generacji kolumn [20]. W problemach tej klasy ilość ograniczeń dla typowego zadania wymiarowania rośnie wraz z liczbą węzłów sieci i połączeń między nimi.

Modele zakładające osiągnięcie rozwiązania efektywnego a zarazem sprawiedliwego można traktować jako szczególny przypadek zagadnienia wielokryterialnego. Mamy bowiem do czynienia z jednej strony z maksymalizacją rozdziału zasobów pomiędzy poszczególnymi zapotrzebowaniami, rozdziałem bądź użytkownikami systemu zachowując przy tym możliwie największy poziom zadowolenia wszystkich użytkowników. Koncepcje rozwiązań sprawiedliwych zmierzają więc w kierunku minimalizacji miar rozbieżności, nierówności ocen. Rozwiązanie sprawiedliwe pozwala uzyskać również inny model optymalizacji nazywany modelem sprawiedliwości proporcjonalnej (PF). Jest on często stosowany w dziedzinie telekomunikacji, gdzie istotne jest zrównoważenie ruchu na węzłach sieci w sposób odpowiednio sprawiedliwy. Wykorzystuje on własności logarytmów, dzięki którym w stosunkowo prosty sposób można go zapisać w postaci modelu liniowego. Oprócz tego dzięki specyficznemu charakterowi monotoniczności funkcji logarytmicznej, która opisuje wartość poszczególnych alokacji, model optymalizacji zwraca szczególną uwagę na najmniejsze wartości funkcji osiągnięcia. Model wykorzystuje przydatną w tym przypadku własność logarytmów związaną z tym, że dziedziną funkcji logarytmicznej są liczby dodatnie. Jedną z jego wad jest natomiast brak parametru sterującego, który pozwalałby na uzyskanie spektrum rozwiązań od najbardziej sprawiedliwego do najbardziej wydajnego. Funkcja kryterium w tym modelu wygląda następująco:

$$\max \sum_{d \in D} \log(y_d) = \max \log\left(\prod_{d \in D} y_d\right) \quad (33)$$

$$y_d = h_d r_d, \quad (34)$$

gdzie:

y_d - funkcja kryterium zwracająca zysk z alokacji h jednostek zapotrzebowania na d -tym zapotrzebowaniu,

h_d - liczba jednostek obciążenia przypisanych do d -tego zapotrzebowania,

r_d - zysk z przypisania jednej jednostki obciążenia na d -te zapotrzebowanie.

Rozwiązanie modelu PF-fairness gwarantuje osiągnięcie rozwiązania sprawiedliwego, to znaczy nie dyskryminującego żadnego z zapotrzebowań [33]. Dla problemów związanych z wymiarowaniem sieci rozwiązanie uzyskane metodą PF posiada wyjątkową własność. Funkcja logarytmiczna pozwala bowiem na wykorzystanie jej przebiegu w taki sposób, aby preferować mniejsze alokacje zasobów względem większych, również bardziej dochodowych. Rozwiązanie zapewnia również sprawiedliwość rozwiązania. Rozwiązanie uzyskane metodą PF gwarantuje określony poziom sprawiedliwości oraz większą wydajność niż w przypadku rozwiązań modeli z grupy MMF.

Modele bazujące na koncepcji sprawiedliwości proporcjonalnej są uszczegółowieniem szerszej koncepcji znanej jako α -fairness [34]. Stanowi ona zbiór modeli parametryzowanych przez współczynnik α odnoszący się do poziomu sprawiedliwości akceptowalnego w rozwiązaniu. Równania opisujące model wyglądają następująco

$$U_{\alpha}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sum_{d=1, \dots, m} \frac{y_d^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ dla } \alpha \geq 0, \alpha \neq 1, \\ \sum_{d=1, \dots, m} \log(y_d) \text{ dla } \alpha = 1. \end{cases} \quad (35)$$

W tym miejscu warto przytoczyć analizy, które zostały wykonane dla współczynnika sprawiedliwości dla wybranych metod sprawiedliwych [1]. Modele oparte na sprawiedliwości proporcjonalnej (PF) jak również max-min fairness (MMF) stanowią dwie grupy modeli sprawiedliwych. Dla pierwszego podejścia została określona granica, która wynosi

$$\text{POF}_{\text{PF}} \leq 1 - \frac{2\sqrt{m}}{m} \quad (36)$$

gdzie m stanowi liczbę możliwych alokacji zasobów w rozpatrywanej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych. Dla drugiej grupy modeli istnieje granica, która została określona następującą nierównością

$$\text{POF}_{\text{MMF}} \leq 1 - \frac{4m}{(m+1)^2} \quad (37)$$

Z powyższych nierówności należy wyciągnąć wniosek, że górna granica POF przyjmuje bardziej atrakcyjne wartości dla modelu PF.

2.3 Sformułowanie problemu dla rozdziału zasobów ograniczonych w sieci

W pracy do testowania istniejących jak również nowo utworzonych modeli optymalizacji sprawiedliwej oparto się na przykładzie problemu sieciowego, gdzie zadanie dotyczy rozdziału zasobów obciążenia na wybranych zapotrzebowaniach [35]. Sieć jest szczególnym przypadkiem grafu. Z definicji graf jest to zbiór wierzchołków- N oraz łączących je krawędzi (nie posiadających zwrotu) $E \subseteq \{(n_1, n_2): n_1, n_2 \in N, n_1 \neq n_2\}$ lub łuków (posiadających zwrot) $L \subseteq \{(n_1, n_2): n_1, n_2 \in N, n_1 \neq n_2\}$. Graf można określić według podstawowej definicji jako parę $G = (N, E)$ lub $G = (N, L)$. Powyższą definicję można rozszerzać o dodatkowe cechy przypisywane krawędziom, jak na przykład dodanie wag lub orientacji krawędzi. W pierwszym przypadku przypisania wag mówimy o grafach ważonych wierzchołkowo- $G = (N, E, \omega(n))$ lub ważonych krawędziowo- $G = (N, E, \omega(e))$. Gdy dodawana jest charakterystyka orientacji połączeń między wierzchołkami, graf nazywany jest grafem skierowanym (digrafem)- $G = (N, L)$, gdzie $L \subseteq \{(n_1, n_2): n_1, n_2 \in N, n_1 \neq n_2\}$ jest zbiorem uporządkowanych par wierzchołków (źródło, ujście) i jest nazywany zbiorem łuków. W teorii grafów wyróżniamy grafy puste, które nie posiadają krawędzi ani łuków oraz pełne, które posiadają wszystkie możliwe połączenia. Sieci są to grafy, które posiadają krawędzie (nie mające zwrotu) lub łuki (posiadające zwrot), które mają przypisane wagi. Wagami w zależności od grupy dziedziny problemów mogą być przepustowość, czas przejazdu, koszt wyboru, itp. W odniesieniu do sieci wierzchołki grafu nazywane są węzłami. Topologia sieci jest to więc struktura połączeń między węzłami, która jest wykorzystywana w zadaniach związanych z telekomunikacją, zadaniami transportowymi czy też drzewami decyzyjnymi.

Do pojęć związanych z problemami związanymi z grafami należy pojęcie ścieżki. Ścieżka, inaczej marszruta, jest to uporządkowany ciąg wierzchołków, łuków bądź krawędzi. Gdy w wyznaczonej ścieżce nie występują powtarzające się wierzchołki, taką ścieżkę nazywamy ścieżką/marszrutą prostą lub drogą, wyłączając przypadek ścieżki zamkniętej, gdzie wierzchołek początkowy jest również wierzchołkiem końcowym. Taki przypadek nazywany jest cyklem w grafie. Cykl zawierający wszystkie wierzchołki grafu nazywany jest cyklem Hamiltona, a cykl zawierający wszystkie łuki grafu nazywany jest cyklem Eulera. Grafy nie zawierające żadnego cyklu nazywane są drzewami. Pojęcie spójności grafu dotyczy możliwości osiągnięcia wybranego losowo wierzchołka z innego losowo wybranego. Jeżeli istnieje co najmniej jedna para wierzchołków, między którymi nie ma możliwości wyznaczenia ścieżki, innymi słowy istnieje co najmniej jeden wierzchołek izolowany, taki graf nazywany jest

niespójnym. Wśród grafów spójnych można mówić o różnym stopniu nasycenia grafu połączeniami, możemy mówić o grafach bardziej lub mniej pełnych. Stopień ten jest wprost proporcjonalny do wartości średniego stopnia wierzchołków czyli sumy łuków wchodzących lub wychodzących z danego wierzchołka. W pracy problem RZO został przedstawiony na przykładzie sieci. Sieć jest traktowana jako zawężenie wszystkich możliwych przypadków grafów do tych, w których między węzłami istnieją łuki (skierowane) lub krawędzie (nieskierowane) mające przypisane do siebie określone wagi. W teorii rozróżniamy następujące klasy trudności problemów obliczeniowych:

- problemy P, gdzie znalezienie oraz sprawdzenie rozwiązania może zostać wykonane maksymalnie w czasie wielomianowym,
- problemy NP- zupełne, w których sprawdzenie rozwiązania może nastąpić maksymalnie w czasie wielomianowym, natomiast jego znalezienie w czasie dłuższym niż wielomianowy,
- problemy NP- trudne, dla których znalezienie rozwiązania odbywa się w czasie dłuższym niż wielomianowy (wykładniczym) natomiast sprawdzenie rozwiązania odbywa się ze złożonością co najmniej taką jak innego problemu NP.

Rozdział skończonych zasobów sieciowych jakimi są wartości sumarycznego obciążenia sieci transferem danych, rezerwacji wymaganego pasma pozwalającego na zestawienie połączenia należy do grupy problemów NP-trudnych [36]. Jednym z wielu wyzwań podczas wymiarowania sieci telekomunikacyjnych jest przydział zasobów sieciowych między zadanymi węzłami. Zasobami sieciowymi są wartości zarezerwowanej przepustowości dla zestawionego połączenia. Jednym ze sposobów wykorzystywanych do tego celu jest formułowanie zadania programowania liniowego [37]. W niniejszej pracy skupiono się na optymalizacji przydzielenia zasobów (pojemności, przepustowości łącz) dla zadanych przepływów na danych ścieżkach w grafie nieskierowanym. Dodatkowo ważnym elementem zadania jest fakt, że ścieżki dzielą między sobą ograniczone zasoby przepustowości, co wpływa na zaistnienie problemu decyzyjnego. Do rozwiązania problemu należy przyjąć, w jaki sposób powinna zostać opisana topologia sieci i zależności między węzłami i łukami [38]. Szeroko stosowane są dwa główne podejścia nazywane sformułowaniami węzeł-łuk (NL, z ang. node-link) lub łuk-ścieżka (LP, z ang. link-path). Różnią się one między sobą głównie sposobem tworzenia macierzy incydencji, w których określane są przy pomocy wartości logicznych (prawda / fałsz), czy z danego węzła wychodzi lub wchodzi określony łuk (formuła węzeł-łuk) lub, czy do danej drogi należy określony łuk (formuła ścieżka-łuk). Podejście NL,

wykorzystane przy badaniu metod sprawiedliwej optymalizacji przepływów w sieci różni się od sformułowania LP również wymaganymi ograniczeniami, związanymi z zapewnieniem przepływu strumienia dla zadanych zapotrzebowań między źródłami a ujáciami. W przypadku pierwszej z wymienionych są to trzy główne założenia, które dotyczą:

- zachowania strumienia wypływającego z węzła początkowego,
- zachowania strumienia wpływającego do węzła docelowego,
- zachowanie równowagi pomiędzy strumieniem wpływającym oraz wypływającym z węzła pośredniczącego.

Powyższe założenia dotyczą każdego z zadanych zapotrzebowań oraz dla każdego węzła. Dla podejścia łuk-ścieżka należy przygotować wcześniej zbiór wszystkich ścieżek możliwych do wykorzystania przez zadane zapotrzebowania. Jakość rozwiązania bezpośrednio zależy więc od rzetelności wykonania procesu przetworzenia danych w celu wygenerowania wszystkich możliwych ścieżek w sieci. W modelu tym można też tak generować ścieżki, aby uniemożliwić rozwidlanie się przepływów w sieci. Zarówno notacja NL jak i LP wykorzystuje zmienne o wartościach logicznych zawarte w macierzach incydencji. W pierwszym przypadku wyróżnia się macierz incydencji węzłów z łukami. W notacji LP tworzone są macierze incydencji łuków ze ścieżkami. W sieciach, gdzie występuje znacząco więcej łuków niż węzłów, notacja LP wymaga więc większego nakładu pracy w celu poprawnego przygotowania modelu. Po doborze jednego ze sposobów opisu struktury sieci należy podjąć decyzję związaną z charakterystyką zapotrzebowań pod kątem możliwości rozwidlania się ścieżek. Aby rozwiązanie mogło zostać przełożone na rzeczywisty wynik, należy posiadać wiedzę na temat tego, czy przesyłane pakiety należące do danego zapotrzebowania mogą być po drodze rozdzielane, czy muszą być nadawane w określonej kolejności, czy występują jakieś priorytety lub inne dodatkowe ograniczenia. Każdy z wybranych kierunków formułowania modelu, wpływa istotnie na budowę modelu optymalizacji. Ważnym założeniem jest również ustalenie, jakiego typu zmienne mogą być zwracane w modelu. Niewątpliwie najczęściej zakłada się ciągły charakter zmiennych, co pozwala uniknąć potrzeby definiowania dodatkowych ograniczeń, które są niezbędne do zapewnienia warunku całkowito-liczbowości zmiennych.

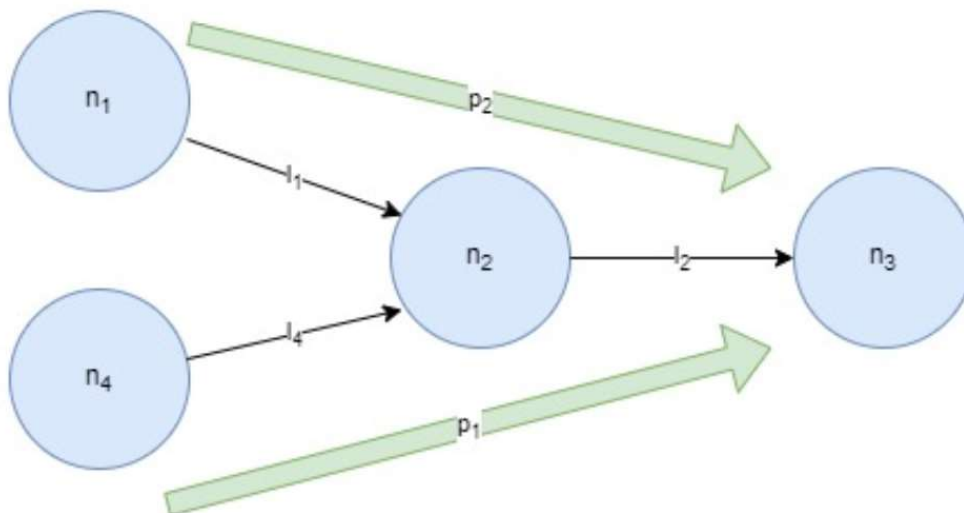
W problemie przydziału ograniczonych zasobów obciążeni na zadany zbiór ścieżek, którymi są pary źródło-ujście, należy założyć określony zysk z alokacji jednostki obciążenia przydzielonego dla danej ścieżki (danego łuku). Takie założenie pozwala lepiej zauważyć rozbieżność między maksymalizacją kryterium całkowitego przychodu z alokacji obciążenia

oraz kryterium równego przydziału zasobów sieciowych między każdym zapotrzebowaniem, szczególnie tym mniej dochodowym. Dla tak postawionego problemu decyzyjnego podstawowe algorytmy maksymalizacji funkcji kryterium (dochodu) okazują się nie do przyjęcia, ponieważ mogą prowadzić do sytuacji „zagłodzenia”, czy też „blokowania” ścieżek mniej atrakcyjnych z punktu widzenia tego kryterium [39]. Rozwiązanie problemu optymalizacyjnego polegającego na maksymalizacji wprost całkowitego przychodu z alokacji obciążenia jest zadaniem prostym zarówno do sformułowania, jak również do implementacji w postaci modelu liniowego. Podobnie wygląda sytuacja w przypadku maksymalizacji stopnia „równomierności rozkładu”, czy też maksymalizacji zapotrzebowań najmniej dochodowych. Do implementacji takich algorytmów służą wyspecjalizowane i zaprojektowane pod tym kątem środowiska optymalizacyjne, wykorzystujące algorytmy, które w krótkim czasie pozwalają uzyskać rozwiązanie optymalne. Na rynku można znaleźć rozwiązania komercyjne (IBM ILOG CPLEX, AMPL, MATLAB, LINDO, AIMMS, Gurobi, inne), jak również wolno-dostępne (GUSEK, Pyomo, Scipy, inne). Każde ze środowisk cechuje się charakterystyczną dla siebie składnią języka pozwalającego na zapis modeli matematycznych.

Model problemu, który jest rozwiązywany przy pomocy wybranych środowisk optymalizacyjnych oraz narzędzi programistycznych, wchodzi w skład Systemu Wspomagania Decyzji (SWD), który pełni często główną rolę w funkcjonowaniu przedsiębiorstwa. Ogólnie pojęcie to jest rozumiane jako zautomatyzowane środowisko wspomagające podejmowanie lepszych, bardziej optymalnych decyzji, w zależności od wybranego obszaru i przedmiotu działań. Definicja SWD może również się różnić w zależności od zasięgu czasowego podejmowanych decyzji i może dotyczyć decyzji strategicznych, taktycznych oraz operacyjnych. Decyzje strategiczne są to decyzje dalekosiężne, których efektów powinniśmy się spodziewać w dalekim zasięgu czasowym - powyżej roku, a często utożsamiane są z decyzjami określającymi kierunki działania przedsiębiorstwa. Przedział ten odpowiada krótszemu okresowi dla dwóch kolejnych typów i zwykle się określać decyzje o zasięgu poniżej 12 miesięcy jako decyzje taktyczne, a operacyjne jako decyzje związane z bieżącym funkcjonowaniem przedsiębiorstwa. Procesy decyzyjne związane z różnymi obszarami w organizacji często zależą od siebie tworząc, często trudne do przewidzenia na pierwszy rzut oka pociągane za sobą skutki. Jednym ze sposobów ustrukturyzowania oraz ułatwienia obserwacji badanego systemu jest tworzenie drzew decyzyjnych, które przedstawiają w formie graficznej istniejące zależności między poszczególnymi stanami elementów składowych systemu. Innymi formami zapisu struktury systemu są tabele oraz języki strukturalne, które

pozwalają na przykład na analizę efektów podjęcia określonej decyzji na poszczególne elementy systemu (analiza if-else). Gdy w organizacji przepływ strumieni informacji jest możliwie najbardziej dokładnie opisany, możliwe jest również wykorzystanie systemów analitycznych klasy Business Intelligence. Umożliwiają one wizualizację w formie graficznej (wykresów, tabel, histogramów, statystyk, prognoz) zagregowanych miar związanych z funkcjonowaniem przedsiębiorstwa.

Podjęcie decyzji stanowi znaczący problem w przypadku, gdy pociąga ona za sobą różne skutki w odniesieniu do uzależnionych obszarów decyzyjnych, zwłaszcza gdy są one względem siebie przeciwstawne [40]. Przykładem może być problem alokacji ograniczonych zasobów przepustowości połączenia, gdy jest ono współdzielone (Rys. 2).



Rys. 2 Przykład współdzielenia łączy l_3 przez żądania d_1 oraz d_2 .

Źródło: opracowanie własne.

Przyjmując założenie, w którym przepustowość linii (krawędzi) l_3 jest mniejsza zarówno od przepustowości l_1 oraz l_2 , rozważmy problem alokacji obciążenia na zapotrzebowania d_1 oraz d_2 . Każda jednostka obciążenia przypisana do zapotrzebowania przynosi zysk. Gdy wartość zysku jednostkowego będzie inna, rozwiązanie optymalne zwróci wynik, w którym cała dostępna wartość obciążenia zostanie przypisana na ścieżce bardziej zyskowej, dyskryminując tym samym ścieżkę mniej atrakcyjną. O ile kryterium związane z maksymalizacją zysku jest trywialne w sensie zapisu (jest to iloczyn zysku jednostkowego przypisanego do danej ścieżki oraz ilości obciążenia przydzielonego do niej), to drugie z kryteriów, dotyczące sprawiedliwości rozwiązania wymaga głębszych rozważań [11], [41]. W pierwszym kroku

zdefiniujemy samo pojęcie sprawiedliwości. Często utożsamiane jest ono niesłusznie z pojęciem równości. Przytoczony zostać może przypadek rozkładu ocen w klasie otrzymanych z przeprowadzonego testu. Gdy każdy z uczniów dostanie dokładnie tę samą ocenę, ich rozkład będzie idealnie równy, natomiast na pewno nie będzie sprawiedliwy, zakładając że uczniowie w momencie pisania testu nie posiadali dokładnie takich samych umiejętności. W odniesieniu do alokacji ograniczonych zasobów, sprawiedliwość jest trudniejsza do zdefiniowania [42], [43]. W tym celu często kieruje się następującymi założeniami dla miary sprawiedliwości:

- wynik, w którym co najmniej na jedno z zapotrzebowań przydzielane jest 0 jednostek zasobów, nie jest rozwiązaniem silnie sprawiedliwym,
- sprawiedliwość rośnie wraz ze wzrostem minimalnej wartości alokacji zasobów na zapotrzebowaniach bez uwzględnienia parametrów wpływających na ich atrakcyjność (np. zysków jednostkowych).

Jednym ze sposobów jest sztywne dopisanie ograniczenia na wartość minimalną alokacji na wybranym zapotrzebowaniu. Ten prosty sposób nie daje jednak miarodajnych efektów. Wymaga również od decydenta wiedzy na temat wartości minimalnej, która w większości przypadków jest trudna do oszacowania. Głównym obszarem badań w pracy jest problem alokacji ograniczonych zasobów (RZO) na zadanych zapotrzebowaniach. Jednym z obszarów, gdzie taki problem decyzyjny występuje, jest rozdział obciążeń w sieci. Podobnie jak większość problemów decyzyjnych wymaga w pierwszej kolejności przedstawienia ograniczeń, jakie musi spełniać model optymalizacji [44]. Zaczynając od podstawowych wymagań, jakie musi spełniać poprawnie działający system oparty na sieci, każde obciążenie łącza nie może być większe niż jego przepustowość. W przypadkach światłowodów sprowadza się to może do ograniczonych możliwości interfejsów, które często determinują wartości graniczne. W przypadku innych technologii problem może stać po stronie fizycznych ograniczeń samego medium. Dokładne badanie przepustowości odpowiednich elementów składowych sieci nie jest jednak głównym tematem pracy. W pracy położono w głównej mierze nacisk na istotę problemów alokacji zasobów ograniczonych, gdzie może wystąpić zjawisko współdzielenia tych zasobów. Jest to dość częsty przypadek, który prowadzi do blokowania mniej wydajnych zapotrzebowań w sieci. Głównym celem nowo opracowanych modeli optymalizacji liniowej jest zatem zaproponowanie rozwiązania tego problemu.

Zagadnienia związane ze sprawiedliwością w sieciach telekomunikacyjnych dotyczą najczęściej przypadku obsługi ruchu w sieci. Podstawowym problemem sieciowym jest

rezerwacja zasobów na połączeniach zestawionych między parami węzłów. Gdy połączenia nie współdzielą między sobą zasobów takich jak łuki, zadanie jest trywialne i sprowadza się do alokacji zasobów równych co do wielkości pojemności najmniej pojemnego łuku lub pośredniego węzła. W przypadku współdzielenia co najmniej jednego łuku przez zestawione w sieci połączenia istnieje już możliwość blokowania jednego z nich. Mówiąc dokładniej, ilekroć pojemność zasobów sieciowych, takich jak łącza czy węzły, nie jest wystarczająca do obsługi całego ruchu na jaki jest zapotrzebowanie, określoną część ruchu należy odrzucić. Pojawia się więc naturalne pytanie, jaką decyzję należy podjąć, aby rozwiązanie uwzględniało maksymalne wykorzystanie łączy oraz taki podział ruchu między użytkowników sieci, aby został zachowany wymagany poziom sprawiedliwości rozwiązania. Tego typu problemy powstają na przykład w przypadku dostępu do zasobów wideo, które mogą być serwowane użytkownikom na różnym poziomie jakości. Gdy istnieje pojedyncze źródło zasobu, który jest udostępniany określonej grupie użytkowników, wąskim gardłem jest najczęściej serwis udostępniający te treści. Problem związany z alokacją zasobów na zapotrzebowania, którymi w tym przypadku są klienci usługi, nazywany jest problemem zrównoważenia ruchu (ang. Load Balancing problem). Innym przykładem zadania związanego z tą grupą jest przypisanie zadań do maszyn, które muszą je wykonać w najkrótszym czasie. W teorii wymienić możemy dwie podgrupy takich problemów. W pierwszym przypadku założymy, że każda maszyna posiada taką samą wydajność oraz każde zadanie jest tak samo pracochłonne. W przypadku takich problemów zadanie sprowadza się do optymalizacji funkcji kryterium, która ma na celu minimalizację maksymalnej liczby zadań przypisanych do każdej z maszyn. W drugim przypadku, bardziej ogólnym zadania posiadają różną pracochłonność. Tego typu klasa zadań należy już do grupy zadań NP-trudnych, natomiast rozwiązanie można uzyskać przez zastosowanie najpierw algorytmu Megiddo, pozwalającego na optymalizację rozdziału ułamkowego. W dalszej kolejności w celu uzyskania optymalnie sprawiedliwego przypisania różno-pracochłonnych zadań do zbioru maszyn algorytmu Lenstra, Shmoys'a oraz Tardos opisanego w literaturze [45].

Oprócz opracowanego modelu optymalizacji sprawiedliwej w wersji bazowej należy również pamiętać o określeniu ograniczeń, które muszą zostać wprowadzone, aby proces optymalizacji bazował na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych. W przypadku problemów RZO takimi ograniczeniami może być limit na posiadane zasoby lub maksymalna pojemność poszczególnych miejsc potencjalnych alokacji tych zasobów. W przypadku problemów związanych z produkcją oraz dystrybucją towarów takimi ograniczeniami będzie zdolność

produkcyjna wybranych towarów, ograniczenie na czas pracy poszczególnych punktów, gdzie towary mogą być produkowane, zdolności magazynowe punktów pośredniczących, wartości zapotrzebowań u zadanych odbiorców, itp. W odniesieniu do problemów wymiarowania sieci, które są przedmiotem badań, należy zdefiniować ograniczenia, które pozwalają na określenie topologii sieci oraz ograniczenia na pojemności poszczególnych łączy [38]. W rozpatrywanym przykładzie RZO dla wymiarowania sieci przyjęto następujące oznaczenia. Jako zapotrzebowanie d_{st} rozumiane jest wymaganie ruchowe o określonej wartości z s -tego węzła określanego również jako źródło do t -tego węzła określanego jako ujście. Rozpatrywana sieć może być rozpatrywana jako graf nieskierowany lub skierowany. W pierwszym przypadku bezpośrednie łącza między węzłami nie posiadają zwrotów i nazywane są krawędziami, natomiast w drugim przypadku te połączenia nazywane są łukami i posiadają zwroty. W większości przypadków podejście pierwsze, stosuje się gdy pojemność łącza w jednym i w drugi kierunku jest równa. Grafy skierowane stosuje się tam, gdzie kierunek przepływu informacji ma znaczenie, na przykład w sieciach telekomunikacyjnych. Sieci telekomunikacyjne stają w dalszym ciągu w obliczu rosnącego popytu na wiele usług. Rzeczywisty problem decyzyjny pojawia się w przypadku zapotrzebowania na wielkości strumienia ruchu, jaki powinien zostać wpuszczony do sieci oraz sprecyzowanie, w jaki sposób należy ten ruch rozmieścić w dostępnej topologii sieci. W badanym problemie zakładamy, że w sieci pojawiają się równoległe zapotrzebowania na zestawienie połączenia, które musi spełniać określone wymagania jakościowe. Dodatkowo, założenie zróżnicowanych jednostek zysku z alokacji obciążenia na rozpatrywanych ścieżkach pociąga za sobą niebezpieczeństwo blokowania tych mniej atrakcyjnych z powodu współdzielenia wybranych łączy. Dlatego problem polegający na określeniu, ile ruchu na każdym zapotrzebowaniu (strumień ruchu) powinno zostać wpuszczone do sieci oraz w jaki sposób dopuszczony ruch powinien być kierowany przez sieć, aby spełnić wymagania związane z wysokim wykorzystaniem sieci i zagwarantować sprawiedliwość użytkownikom, jest jednym z najtrudniejszych problemów współczesnego projektowania sieci telekomunikacyjnych. Problem zwany zazwyczaj wymiarowaniem sieci związany jest z planowaniem rozmieszczenia zasobów sieciowych (przepustowość węzłów, przepustowość łączy itd.). Wymiarowanie sieci telekomunikacyjnych wymaga alokacji przepływów (obciążeń, przepustowości) do danych żądań ruchu dla węzłów źródłowych oraz docelowych. Przepływ jednostek przypisany do danego zapotrzebowania wiąże się z przychodem, który może być różny dla różnych wymagań [46]. Aby opisać żądanie, można je zdefiniować jako ścieżkę. Ścieżka między dwoma węzłami w sieci, gdzie pierwszym

jest źródło, a drugi jest ujściem. Możliwe jest zdefiniowanie ścieżki na dwa sposoby. Pierwszym sposobem jest zdefiniowanie ścieżki jako ciąg kolejnych łuków. W tym przypadku ścieżka jest uprzednio zdefiniowana i niemożliwe jest rozdzielanie się przepływu w kolejnych węzłach. W przypadku, kiedy wymiarowanie sieci dopuszcza rozdzielania się strumienia, należy przyjąć inną strategię. Istnieją dwa modele, które pozwalają na spełnienie tych założeń. Podczas wymiarowania sieci do oceny jakości rozwiązania stosowana może być miara sumy alokacji jednostek obciążenia bądź jej wartość średnia. Może być nią również inna miara taka jak mediana, wartość maksymalna, minimalna i wiele innych w zależności od specyficznych preferencji decydenta bądź też charakteru zadania optymalizacji. Gdy rozpatrywany problem zakłada przychód z alokacji tych zasobów, dodatkowo wartości jednostek alokacji przemnożone przez założone zyski jednostkowe, może okazać się dobra do opisu kryterium wydajności systemu. Drugim czynnikiem brany pod uwagę jest kryterium sprawiedliwości. W problemach RZO zawsze to kryterium staje w opozycji do kryterium wydajności. Dobrze zaprojektowany model powinien uwzględniać w zadanym stopniu obydwie te kryteria.

Do pracy z modelami sieci niezbędne jest również wprowadzenie informacji o strukturze sieci. Do tego wykorzystywane są wcześniej wymienione podejścia węzeł-łuk (NL) lub łuk-ścieżka (LP). W notacji NL każde zapotrzebowanie może ulegać rozdzielaniu. Każdy węzeł sieci może stanowić punkt, gdzie ścieżka należąca do wybranego zapotrzebowania ulegnie rozwidleniu lub miejsce, gdzie strumienie podzielonych gałęzi ścieżki będą się zbiegać. W podejściu LP należy pamiętać o wcześniejszym przetworzeniu danych pod kątem generacji ścieżek, które mogą łączyć wybrane pary węzłów sieci. Tego typu dane przechowywane są w macierzy incydencji ścieżek oraz łuków zawierającej wartości binarne zwracanej przez parametr δ_{ep} , przyjmujący wartość 1 w przypadku, gdy l -ty łuk zawiera się w p -tej ścieżce oraz z 0 w przeciwnym przypadku.

Jako zmienne decyzyjne można przyjąć wartości obciążeń na poszczególnych łukach, związane z określonym zapotrzebowaniem (x_{ld}). Zmienne decyzyjne mogą przyjmować wartości całkowite, ciągłe lub binarne (na przykład w przypadkach problemów związanych z szukaniem najkrótszej drogi liczonej jako liczba przeskoków w ścieżce). Ograniczenia na przepustowość poszczególnych łączy mogą zostać zapisane w następujący sposób

$$\sum_{d \in D} x_{ld} \leq c_l, \forall l \in L \quad (38)$$

Oprócz powyższego ograniczenia należy również określić, w jaki sposób ruch w sieci może płynąć. Do określenia topologii sieci można wykorzystać dwie znane notacje. Notacja NL bazuje na wykorzystaniu macierzy incydencji węzłów oraz łuków sieci. W formie matematycznej ograniczenia są zapisywane w następujący sposób

$$\sum_{l \in L} a_{nl} x_{ld} - \sum_{l \in L} b_{nl} x_{ld} = \begin{cases} h_d & \text{dla } n = s_d, \\ 0 & \text{dla } n \neq s_d, t_d, \forall n \in N, \\ -h_d & \text{dla } n = t_d. \end{cases} \quad (39)$$

Powyższe równanie zapewnia równość pomiędzy sumarycznym ruchem wchodzącym oraz wychodzącym z węzła pośredniczącego zapewniając przepływ. W notacji NL występują macierze incydencji $(a_{nl})_{n,l \in L}$ i $(b_{nl})_{n,l \in L}$ zawierają wartości logiczne, oznaczające określające odpowiednio przypadek, kiedy l -te łącze wychodzi z n -tego węzła lub wchodzi do n -tego węzła. Pojemność l -tego łącza jest oznaczona jako c_l . Ograniczenie pozwala również na wymuszenie ruchu wychodzącego z węzła początkowego równego badanej wartości zarezerwowanej przepustowości na ruch dla zadanego zapotrzebowania oraz gwarancję przyjęcia tej wartości w węzle końcowym (h_d).

W notacji LP sformułowanie ograniczeń odnosi się do innych elementów sieci. incydencji między łukami oraz możliwymi ścieżkami, które można zorganizować pomiędzy zadanymi parami węzłów. Można je przedstawić następująco

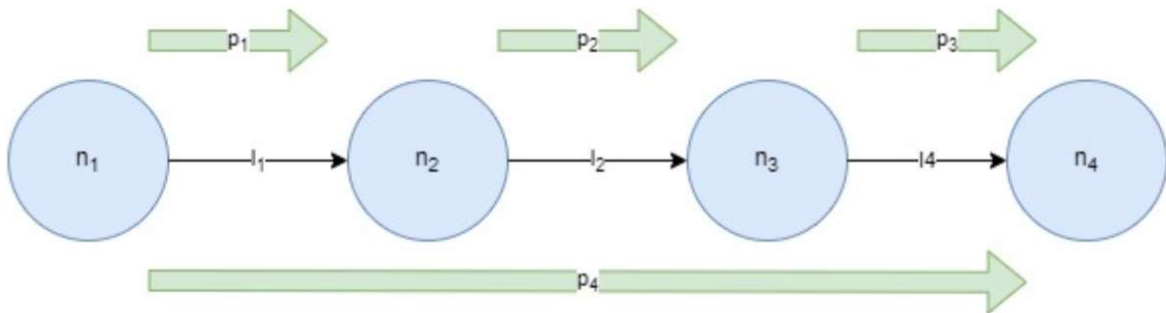
$$\sum_{l \in L} \sum_{p \in P} \delta_{lp} x_p \leq c_l \quad (40)$$

gdzie:

- $\delta_{lp} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } l - \text{ty łuk należy do } p - \text{tej ścieżki} \\ 0, & \text{gdy } l - \text{ty łuk nie należy do } p - \text{tej ścieżki} \end{cases}$

Do powyższego sformułowania przyjęta została inna interpretacja zmiennych decyzyjnych. W odróżnieniu do podejścia NL, ich wartości odnoszą się do wielkości obciążeń na odpowiednich zapotrzebowaniach, a nie na łączach. Sformułowanie LP nie wymaga wprowadzania ograniczeń na pojemność łączy, co również wpływa na uproszczenie samego procesu optymalizacji zmniejszając złożoność obliczeniową, jednak to podejście wymaga wstępnego przetworzenia danych wejściowych. Dla każdej pary węzłów w postaci źródło-ujście należy znaleźć możliwie najwięcej możliwych połączeń. Liczba wygenerowanych połączeń wpływa tutaj bezpośrednio na jakość rozwiązania. W notacji LP topologia sieci jest

opisana za pomocą macierzy $(\sigma_{pl})_{p \in P, l \in L}$ zawierającej wartości logiczne określające, czy l -te łącze należy do p -tej ścieżki i przyjmującej w takim przypadku wartość 1. Wprowadzono tutaj również ograniczenie, które zapewnia przypisanie odpowiedniej wartości obciążenia do zmiennej x_l , która odpowiada wartości alokacji na l -tym łuku. Występująca w nim wartość logiczna macierzy $(\phi_{pd})_{p \in P, d \in D}$ określa, czy p -ta ścieżka może być użyta do obsługi d -tego żądania. Rozważmy przykład ścieżki zbudowanej z trzech łączy tak jak na poniższym rysunku.



Rys. 3 Struktura przykładu ilustrującego problem alokacji zapotrzebowań na przepustowość na zdefiniowanych ścieżkach.

Źródło: opracowanie własne.

Dla przedstawionego przykładu zdefiniowany jest zbiór czterech dróg $P \in \{ p_1, p_2, p_3, p_4 \}$, dla których należy rozdysponować obciążenie łączy zawartych w zbiorze $L \in \{ l_1, l_2, l_3 \}$. Drogi zdefiniowane są następująco: $p_1 = \{ l_1 \}$, $p_2 = \{ l_2 \}$, $p_3 = \{ l_3 \}$, $p_4 = \{ l_1, l_2, l_3 \}$. Ważnym ograniczeniem zadania jest maksymalna pojemność łączy, która oznaczona została jako c_l ($l \in L$). Całkowity przepływ realizowany przez wszystkie ścieżki zawierające w sobie l -ty łuk nie może być większy niż pojemność tej krawędzi. Rozważmy również zadanie polegające na maksymalizacji sumy przepustowości, jaką należy zapewnić p -tej drodze. Dla dodatkowego uproszczenia problemu przyjęto równe wartości pojemności dla każdej krawędzi grafu $c_l = 10$ jednostek. Dla tak trywialnego zadania łatwo zauważyć, że optymalnym rozwiązaniem będzie przypisanie wartości 10 jednostek drodze p_1, p_2 oraz p_3 , natomiast przypisanie wartości 0 jednostek dla drogi p_4 . W praktyce rozwiązanie to zablokuje całkowicie jakikolwiek przepływ bezpośredni z węzła n_1 do n_4 . Należy więc rozważyć możliwość przydzielenia określonej

wielkości przepustowości do drogi p . Każda jednostka przydzielona do tej drogi powoduje jednak zmniejszenie wartości funkcji celu o trzy jednostki. Zaobserwować tutaj można realny konflikt pomiędzy rozwiązaniem maksymalizującym oczekiwany zysk z przepuszczonego zapotrzebowania o maksymalnej wartości, a rozwiązaniem sprawiedliwym. Wielkości te są odwrotnie proporcjonalne. Dla problemu jednokryterialnego, maksymalizującego całkowity przychód funkcja kryterium posiada następującą postać

$$\max \sum_{d \in D} \sum_{p \in P} x_{pd} r_d \quad (41)$$

gdzie:

P - zbiór ścieżek w grafie, dla których należy dobrać wartości rezerwowanych przepustowości,

D - zbiór zapotrzebowań na rezerwację przepustowości,

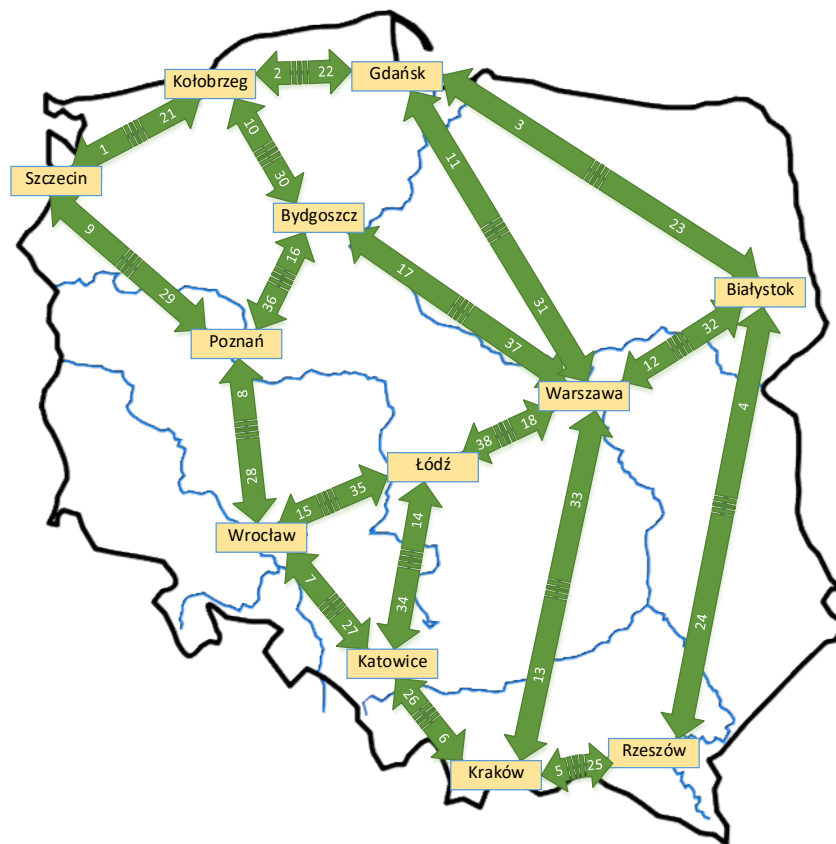
x_{pd} - zmienna decyzyjna określająca wartość przepływu na p -tej ścieżce należącej do d -tego zapotrzebowania,

r_d - wartość przychodu z alokacji jednostki obciążenia na d -tym zapotrzebowaniu.

Do analiz w pierwszej kolejności wykorzystano dane, które opisują sieć szkieletową Polski zbudowaną z dwunastu węzłów oraz osiemnastu krawędzi (trzydziestu sześciu łuków). Sieć szkieletowa łączy główne ciągi telekomunikacyjne zapewniając równoległość dla każdego połączenia. Są to łącza zbudowane na bazie infrastruktury światłowodowej. Kompletny graf wraz z rozmieszczonymi węzłami oraz etykietami łuków sieci przedstawiono na rysunku poniżej (Rys. 4 oraz Rys. 5). W analizach przyjęto założenie, że cała infrastruktura przedstawiona przy pomocy grafu należy do jednego operatora, a łącza mają charakter skierowany, to znaczy mogą posiadać różną przepustowość w dwóch przeciwnych kierunkach. Jako kolejne parametry przyjęto pojemność łuku - c_l , gdzie l jest indeksem łuku grafu (łącza) oraz zysk z alokacji jednostki obciążenia związanego z d -tym zapotrzebowaniem - r_d . Jako zmienne decyzyjne przyjęto wartości obciążeń na l -tego łuku x_l . Z parametrami wejściowymi związane są również zbiory wartości tych parametrów (wektory) takie jak:

- N - zbiór węzłów, gdzie n_i - i -ty węzeł sieci,
- L - zbiór łuków, gdzie l_i - i -ty łuk sieci,

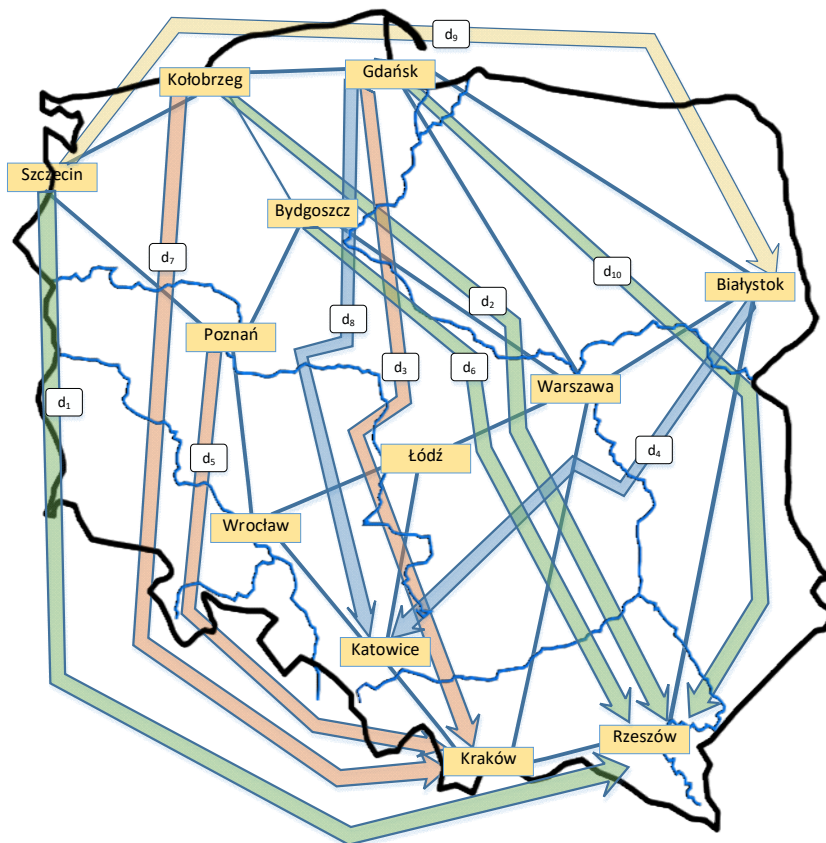
- R - zbiór wartości przychodów jednostkowych z rezerwacji przepustowości na d -tym zapotrzebowaniu,
- D - zbiór zapotrzebowań na obciążenie między parą węzłów,
- C - zbiór pojemności łuków sieci, gdzie c_l – pojemność l -tego łuku,
- S - zbiór źródeł przyporządkowanych do d -tego zapotrzebowania,
- T - zbiór ujść przyporządkowanych do d -tego zapotrzebowania,
- P - zbiór ścieżek umożliwiających alokację zapotrzebowania, wykorzystywany w notacji łuk-ścieżka.



Rys. 4 Topologia sieci rozpatrywanej w zadaniu optymalizacji.

Źródło: opracowanie własne.

Problem dotyczy alokacji obciążeń na zadanych zapotrzebowaniach, które są zdefiniowane jako pary węzłów źródło-ujście. Zostały one tak dobrane, aby mogła nastąpić sytuacja nakładania się ścieżek, tj., aby występowały łącza lub ich fragmenty współdzielone przez ścieżki. Przyjęto również założenie, że przepływ strumienia danych zachodzi w dwie strony. Zapotrzebowania/żądania posiadające zróżnicowane wartości zysków jednostkowych zostały zilustrowane poniżej.



Rys. 5 Ilustracja zadanych zapotrzebowań na alokację obciążeń w zadanej sieci.

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie optymalizacyjne polega na alokacji maksymalnie dużej wartości sumarycznej zasobów sieciowych (obciążeń, przepustowości) na zapotrzebowaniach przy zachowaniu ograniczeń na pojemność połączeń między węzłami sieci. Przydział każdej jednostki obciążenia na zapotrzebowaniu przynosi określony zysk. W procesie alokacji zasobów ograniczonych występuje więc zjawisko konkurowania ze sobą zapotrzebowań.

2.4 Modele optymalizacji bezpośredniej dla problemu RZO

Do modeli związanych z problemem optymalizacji sprawiedliwej zaliczamy między innymi modele Uporządkowanych Średnich Ważonych (OWA – ang. Ordered Weighted Averages), Punktu Odniesienia (RPM – ang. Reference Point Model) oraz model sprawiedliwości proporcjonalnej (PF). Modele te wykorzystują miary sprawiedliwości, które kładą szczególny nacisk na zapotrzebowania najbardziej oddalone od średniej. Wykorzystują one miary równomierności rozkładu, które bazują na analizie k -największych (lub najmniejszych) wartości poszczególnych funkcji odnoszących się do kolejnych alokacji zasobów. Aby uwzględnić w procesie optymalizacji kryterium sprawiedliwości należy często zastosować odpowiednie modyfikacje. W pracy przedstawiono różne koncepcje tworzenia modeli sprawiedliwych. Ich porównania dokonano w kilku krokach wybierając modele parami, wybierając różne podejścia do opisu topologii sieci. Kolejno dokonano porównania modeli OWA oraz RPM. Wymienione modele przetestowano na przykładzie sieci telekomunikacyjnej.

Podczas wymiarowania sieci napotyka się problem rozdziału zasobów łącz na zadane zapotrzebowania realizacji połączeń o określonej jakości [47]. Można wykorzystać w tym problemie sprawiedliwe modele optymalizacyjne. Łatwo jest sobie wyobrazić, że przy realizacji żądań na przepływ danych w sieci może zaistnieć problem podziału ograniczonego zasobu połączeń, jakim jest przepustowość [48]. Upraszczając problem optymalizacji do maksymalizacji efektywności, możliwe jest uzyskanie rozwiązania, które dyskryminuje mniej wydajne zapotrzebowania blokując je. Tak jest, gdy w sieci są łącza do więcej niż dwóch różnych ścieżek o różnych przychodach jednostkowych. W takim przypadku rozwiązanie maksymalizujące całkowity zysk przydzieliłoby cały możliwy ładunek na ścieżce bardziej dochodowej. Sytuacja, w której przynajmniej jedno żądanie jest zagłodzone (przyjmuje wartość 0 zarezerwowanej przepustowości), sprawia że wspomniany przykład jest nie do zaakceptowania pod względem sprawiedliwości. Metodami pozwalającymi uzyskać sprawiedliwe i bardziej efektywne rozwiązanie są na przykład proporcjonalna sprawiedliwość (PF), metoda uporządkowanych średnich ważonych (OWA), metoda punktu odniesienia (RPM) lub inne [49]. Zwykle do oceny rzetelności alokacji zasobów służą miary nierówności. W szczególności współczynnik Giniego, który jest wykorzystywany w badaniach w celu liczbowego określenia nierównomierności rozkładu dóbr. Indeks równy 0 daje informację o pełnej równości rozkładu i rośnie do 1, podczas gdy nierówność dystrybucji wzrasta. Ta miara posłużyła między innymi jako współczynnik sprawiedliwości optymalizowany w opracowanych ilorazowych modelach optymalizacji liniowej.

Problemy alokacji ograniczonych zasobów na zapotrzebowania może dotyczyć wielu zadań optymalizacyjnych. Można do tej grupy zaliczyć zadanie przydzielania pasma przepustowości do klientów przez usługi udostępniania treści wideo, serwisowania pojazdów w warsztacie samochodowym, gdzie wykonanie określonych usług wiąże się z różnym zyskiem jednostkowym oraz wymaga danego czasu i wiele innych. Do rozwiązania tego problemu można zastosować kilka podejść uwzględniających sprawiedliwy rozdział zasobów: Max-Min Fairness (MMF), leksykograficzna maksymimalizacja (lexMAX), Proportional Fairness (PF) oraz modele uwzględniające relację anonimowej lub wyrównującej preferencji. Model OWA pozwala na to przez sterowanie wagami przypisanymi do kolejno posortowanych funkcji kryterium. Model RPM pozwala na określenie przedziału wartości najbardziej pożądanym z punktu widzenia określonych funkcji osiągnięcia [50]. Opracowane modele wykorzystują szczególne własności wykorzystanych operatorów matematycznych lub funkcji. Wiele modeli jest opracowywanych jako dedykowane dla szczególnej grupy problemów decyzyjnych. Wprowadzane są w nich często nietypowe ograniczenia, które pozwalają na wymuszenie konkretnego modelu preferencji. Wymienione metody polegają na maksymalizacji najmniejszej z funkcji kryterium. Sprawiedliwość proporcjonalna wykorzystuje natomiast charakterystyczny przebieg funkcji logarytmicznych, których suma pozwala się w przyjazny sposób sprowadzać do postaci liniowej modelu. Obecnie istniejące modele optymalizacji sprawiedliwej zostały opracowane w celu zapewnienia rozwiązania szczególnie uwzględniającego najmniej atrakcyjne alokacje zasobów ze względu na ocenę jakościową rozwiązania.

Model OWA jest pierwszą z metod opisanych oraz zamodelowanych w celu rozwiązania zadania przydziału ograniczonych zasobów opartego na problemie sieciowym. Uwzględnia on wyrównującą relację preferencji, która polega na porównywaniu posortowanych wcześniej wektorów ocen, przez co kolejność wartości optymalizowanych funkcji przestaje mieć znaczenie [51]. Koncepcja uporządkowanych średnich ważonych posiada kilka realizacji [52], wśród których wymienić należy model wartości skumulowanych bądź model prosty. Podczas opracowywania metody uwzględniającej taki model preferencji, można wykorzystać rozwiązanie, które wyznacza kolejne najmniejsze lub największe wartości funkcji alokacji zasobów na zbiorze zapotrzebowań D . W tym celu wprowadzana jest dodatkowa zmienna binarna z_{id} oraz nieograniczona zmienna typu ciągłego t_i , gdzie t_i jest i -tym elementem wektora \mathbf{t} oraz $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Model, który pozwala otrzymać kolejne wartości funkcji w porządku nierosnącym wygląda następująco

$$f_i(x) = \min t_i \quad (42)$$

przy ograniczeniach:

$$t_i - f_i(x) \geq -Kz_{id}, z_{id} \in \{0,1\}, \forall d \in D \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^m z_{id} \leq i - 1, \forall d \in D \quad (44)$$

Taki zapis pozwala otrzymać dla $i = 1$ wartość największą spośród wszystkich wartości $f(x)$, a następnie dla każdego $i > 1$ każdą kolejną w porządku malejącym przez zignorowanie kolejnych ograniczeń, przy wykorzystaniu stałej K o odpowiednio dużej wartości (większej niż największa możliwa wartość funkcji osiągnięcia). W analogiczny sposób można przedstawić zależności pozwalające na wyznaczenie kolejnych wartości $f(x)$ w porządku niemalejącym. Tak sformułowane zadanie optymalizacji można zapisać w postaci PL

$$f_i(x) = \max t_i \quad (45)$$

przy ograniczeniach:

$$t_i - f_d(x) \leq Kz_{id}, z_{id} \in \{0,1\}, \forall d \in D, \quad (46)$$

$$\sum_{i=1}^m z_{id} \leq i - 1, \forall d \in D. \quad (47)$$

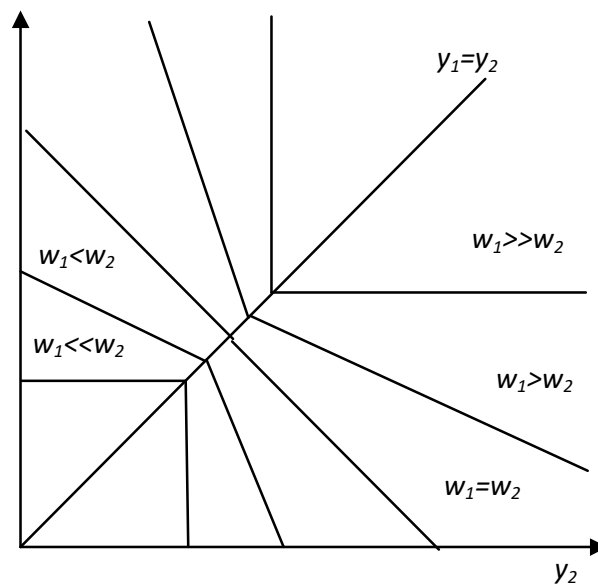
W zależności czy optymalizacja polega na maksymalizacji czy na minimalizacji funkcji kryteriów mamy do czynienia z uporządkowaniem niemalejącym lub nierosnącym wektorów ocen [53]. Ciąg uporządkowanych niemalejąco poszczególnych wektorów ocen oznaczony został jako $\theta(y) = (\theta_1(y), \theta_2(y), \dots, \theta_m(y))$, gdzie $\theta_1(y) \leq \theta_2(y) \leq \dots \leq \theta_m(y)$. Kolejne wartości funkcji oceny spełniają założenia anonimowej relacji dominacji. Z tego faktu wynika również to, że każde zapotrzebowanie na alokację zasobów jest traktowane jednakowo. Model matematyczny sformułowany ogólnie wygląda następująco

$$\max\left\{\sum_{d=1}^m w_d \theta_d(f(x)): x \in Q\right\} \quad (48)$$

gdzie:

- $w_1 > w_2 > \dots > w_m$,
- $\sum_{d=1}^m w_d = 1$.

Takie sformułowanie problemu generuje $m!$ nierówności liniowych oraz wykorzystuje technikę relaksacji w postaci generacji kolumn w zadaniu dualnym [54]. Warstwicę agregacji OWA przedstawiono na rysunku poniżej. Należy zwrócić uwagę na zróżnicowanie ich charakteru, gdy różnice między wartościami wag są istotne pomiędzy kolejnymi wartościami zasobów przypisanych do kolejnych alokacji.



Rys. 6 Ilustracja przykładowych warstw model OWA

Źródło: opracowanie własne

Wprowadzenie wag wartościujących poszczególne wartości skumulowanych ocen pozwala na dość elastyczne sterowanie modelem [55]. Dzięki rozchylonym warstwicom model OWA pozwala na wyznaczenie rozwiązań bardziej efektywnych w porównaniu do modelu MMF. W zależności od charakteru optymalizacji (maksymalizacja lub minimalizacja) warstwicę przemieszczają się po układzie współrzędnych po prostej $y_1 = y_2$ odpowiednio w górę lub dół. Proces optymalizacji przebiega do momentu, kiedy warstwicę napotkają punkt odpowiadający rozwiązaniu dopuszczalnemu. Według teorii optymalizacji tak osiągnięte rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym. Zwiększenie różnic między kolejnymi wagami przypisanymi do kolejnych najbardziej dyskryminowanych żądań powoduje zbliżenie się w rozwiązaniu do rozwiązania MMF, natomiast przy zrównaniu wag należy spodziewać się rozwiązania odpowiadającego prostej maksymalizacji (model EffMAX). Na sprawiedliwość

rozwiązania wpływa wykorzystanie w tym modelu dominacji wyrównującej. W literaturze można znaleźć również opracowania modelu OWA dla wartości skumulowanych wag

$$\max\left\{\sum_{d=1}^m \bar{w}_d \bar{\theta}_d(\mathbf{y})\right\} \quad (49)$$

gdzie:

- $\bar{\theta}_d(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d \theta_i(\mathbf{y})$,
- $\bar{w}_m = w_m$,
- $\bar{w}_d = w_d - w_{d+1}$, dla $d = 1, \dots, m - 1$,
- $w_d \geq 0$.

W modelu rozpatrywane są kolejne skumulowane wartości wektorów ocen, tzn. kolejno pierwsza najmniejsza wartość, suma dwóch najmniejszych, trzech itd. Dla funkcji oceny, która jest wklęsła oraz wag dodatnich, model uporządkowanych średnich ważonych skumulowanych można zapisać w postaci programowania liniowego. Aby zapisać model uporządkowanych średnich ważonych w postaci programowania liniowego wykorzystano wektor zmiennych nieograniczonych t , który pozwala w efektywny sposób na wyznaczanie kolejnych i najmniejszych wartości przypisanych do ścieżek zapotrzebowań [49], [56]. Wartość zmienna η_i odpowiada w modelu i -tej najmniejszej wartości $f_d(x)$ przyjmowanej dla zmiennej x . Postać skumulowana modelu OWA charakteryzuje się bardzo wysoką wydajnością obliczeniową. Zasadniczą zaletą metody jest wykorzystywanie przez nią dominacji wyrównującej. Jest to główna cecha wpływająca na jej sprawiedliwość. Parametrami sterującymi metodą są w tym przypadku wagi przypisywane do poszczególnych wartości funkcji osiągnięcia, które są w każdym kroku algorytmu optymalizacji porządkowane niemalejąco. Wagi muszą zostać określone wśród parametrów wejściowych metody w tym porządku. Ich liczba musi być równa liczbie poszczególnych funkcji, które w omawianym przypadku oznaczają wartość dochodu z alokacji określonej wartości obciążenia na danym zapotrzebowaniu. Przypisanie wagi pierwszej znacząco większej od wszystkich pozostałych wpłynie na maksymalizację wartości najmniej atrakcyjnej funkcji osiągnięcia. Przypisanie wag równej wartości, pozwoli natomiast na wyznaczenie rozwiązania równoznacznego z prostą maksymalizacją dochodu całkowitego bez względu na sprawiedliwość. Podczas doboru wag jako parametrów wejściowych, należy zwrócić szczególną uwagę na względność między kolejnymi wagami, tzn. stosunek między nimi a nie na same wartości. Przyjmując jako funkcję kryterium całkowity dochód z

przydzielenia h jednostek przepustowości na d -te zapotrzebowanie przy przychodzie jednostkowym wartości r_d model OWA można zapisać w następującej postaci programowania liniowego

$$\max\left\{\sum_{d=1,\dots,m}\bar{\omega}_d\eta_d\right\} \quad (50)$$

przy ograniczeniach:

$$\eta_d = dt_d - \sum_{i=1}^m z_{di}, \quad (51)$$

$$t_d - z_{di} \leq h_i r_i, \quad (52)$$

$$z_{di} \geq 0, \quad (53)$$

$$\omega_d \geq 0, \quad (54)$$

dla $d, i = 1, \dots, m$.

Tak sformułowany model będzie traktował z odpowiedniej wielkości premią wartości najmniejsze wektora $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. W modelu zmienna z_{di} przyjmuje wartości ciągłe, nieujemne. W zależności od rozkładu wag przyjętych w zadaniu wynik będzie bardziej lub mniej zrównany. Wektor zmiennych \mathbf{t} pozwala na zwrócenie kolejnych posortowanych wartości funkcji kryterium tak, aby kolejne wagi były przypisane od najbardziej dyskryminowanych do tych, które są najbardziej preferowane według kryterium wydajności.

Metoda punktu odniesienia (RPM), wykorzystuje cechy charakterystyczne dla przedziałów rozmytych [57]. Jest to drugi przykład podejścia, które pozwala uwzględnić kryterium sprawiedliwości w sposób bezpośredni. Model uwzględnia w swojej budowie przedziały wartości funkcji osiągnięcia, które są najbardziej pożądane przez decydenta. Wykorzystanie właściwości przedziałów rozmytych pozwala na przypisanie funkcjom wartości, które nie muszą należeć do określonego wcześniej przedziału. Rozwiązano to wprowadzając dodatkowe współczynniki odpowiedzialne za spadek (γ) oraz wzrost dodatkowy (β) „zadowolenia” decydenta z osiągniętej wartości funkcji, gdzie $0 < \beta < 1 < \gamma$. Kresy górny oraz dolny przedziału stanowią parametry pozwalające na sterowanie rozwiązaniem. W określonych przypadkach jako te parametry podaje się wartość najgorszą z możliwych

(nadir) oraz najlepszą (utopię). Najczęściej jednak jest to parametr wyznaczany empirycznie na podstawie analiz rozpatrywanego problemu. Model RPM uwzględniając próg dolny oraz górny dla wartości funkcji kryterium można zapisać w postaci programowania liniowego

$$\max\{z + \varepsilon \sum_{d=1, \dots, m} z_d\} \quad (55)$$

przy ograniczeniach:

$$z \leq z_d, \quad (56)$$

$$z_d \leq \beta \frac{y_d - a_d}{a_d - b_d} + 1, \quad (57)$$

$$z_d \leq \frac{y_d - a_d}{a_d - b_d}, \quad (58)$$

$$z_d \leq \gamma \frac{y_d - a_d}{a_d - b_d}, \text{ dla } d = 1, \dots, m. \quad (59)$$

Należy zauważyć, że powyższy model wymusza działanie zbliżone do agregacji OWA przez analizę kolejnych najmniejszych wartości funkcji. W modelu została wprowadzona zmienna pomocnicza z_d , która umożliwia preferowanie wyboru takiej wartości funkcji osiągnięcia (realizacji) y_d , która zawiera się w najbardziej pożądanym przedziale. Dla d -tego zapotrzebowania jest on zawarty pomiędzy wartościami a_d (utopii) oraz b_d (nadiru), które stanowią główne parametry sterujące metody RPM. Utopia jest utożsamiana z wartością największą z akceptowalnych, natomiast nadirem jest traktowany jako najgorsza z możliwych wartości do osiągnięcia. Podstawowym założeniem, które zostało wykorzystane do budowy tego modelu, jest premiowanie wartości zawierających się w tym przedziale oraz karanie wartości znajdujących się poza tym przedziałem. Porównania metod dokonano przy wykorzystaniu ograniczeń w notacji NL oraz kryterium wydajności systemu w postaci maksymalizacji sumarycznego przychodu z alokacji jednostek na poszczególnych zapotrzebowaniach

$$\max \sum_{d \in D} h_d r_d \quad (60)$$

Dla porównania metod wykonano obliczenia dla modeli RPM oraz OWA. Wyniki przedstawiono w formie tabelarycznej oraz w formie wykresu. Dla badanych modeli czas obliczeń był pomijalnie mały. Wartości dochodów jednostkowych były generowane losowo dla 10 zapotrzebowań na alokację obciążenia między zadanymi parami węzłów. Należy spodziewać się, że żądaniami, które będą najbardziej dyskryminowane przez metodę optymalizacji dochodu całkowitego będą te, dla których przypisano najmniejszą wartość dochodu jednostkowego oraz muszą współdzielić co najmniej jeden łuk z innym zapotrzebowaniem. Do blokowania może również dojść w przypadku, gdy co najmniej jedno łącze jest współdzielone przez co najmniej dwa zapotrzebowania o różnych zyskach jednostkowych. Obliczenia wykonano dla wektora przychodów jednostkowych o następujących wartościach $R=[110, 120, 100, 80, 90, 100, 110, 100, 80, 100]$. Dla badanych modeli optymalizacyjnych przyjęto parametry sterujące, przedstawione w poniższej tabeli.

Tabela 2 Wartości parametrów metod sprawiedliwych

OWA (1)	OWA (2)	OWA (3)	OWA (4)	OWA (5)	RPM (1)		RPM (2)		RPM (3)		RPM (4)	
ω	ω	ω	ω	ω	a	r	A	r	a	r	A	r
10	10	10	10	10	6500	6000	11000	10000	11000	10000	6000	4000
9	10	10	1	9	6500	6000	11000	6000	11000	10000	6000	4000
5	10	10	1	8	6500	6000	11000	10000	11000	10000	6000	4000
4	10	10	1	7	6500	6000	11000	6000	11000	6000	6000	4000
1	1	10	1	6	6500	6000	11000	6000	11000	10000	6000	4000
1	1	10	1	5	6500	6000	11000	10000	11000	10000	6000	4000
1	1	10	1	4	6500	6000	11000	10000	11000	10000	6000	4000
1	1	10	1	3	6500	6000	11000	6000	11000	6000	6000	4000
1	1	10	1	2	6500	6000	11000	6000	11000	6000	6000	4000
1	1	10	1	1	6500	6000	11000	10000	11000	10000	6000	4000

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3 Wartości zysków z alokacji jednostek obciążenia dla zestawu 1 wektora wartości zysków jednostkowych (NL)

Metoda	y (uporządkowane wektory ocen)
OWA (1)	[3666,3666,3666,3666,3666,3666,3666,5000,5750,6166]
OWA (2)	[3666,3666,3666,3666,3666,3666,3666,5000,5750,6166]
OWA (3)	[0,0,0,0,0,5000,6000,18000,22000,28000]
OWA (4)	[1846,1846,1846,1846,1846,6000,8615,9923,10923,18000]
OWA (5)	[0,0,0,0,12600,12600,12600,12600,12600,13600]

RPM (1)	[3666,3666,3666,3666,3666,3666,3666,4833,6000,6000]
RPM (2)	[0,0,2093,6000,6000,6187,6187,6187,6187,6187]
RPM (3)	[3666,3666,3666,3666,3666,3666,3666,4833,6000,6000]
RPM (4)	[3666,3666,3666,3666,3666,3666,3666,5000,5750,6166]

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie tabeli 3 można wyznaczyć wartości obciążeń poszczególnych ścieżek. Są to docelowe wartości zmiennych decyzyjnych, które pozwalają na osiągnięcie spodziewanego rezultatu. Zostały one przedstawione w tabeli Tabela 4. Warto zwrócić uwagę, że ich wartości są stosunkowo zrównane ze sobą, natomiast stopień sprawiedliwości różni się zasadniczo. Zgodnie z przewidywaniami model jednokryterialny maksymalizujący sumę przychodów z alokacji obciążeń zignorował pary najmniej atrakcyjne dochodowo, zwracając rozwiązanie niedopuszczalne pod kątem sprawiedliwości.

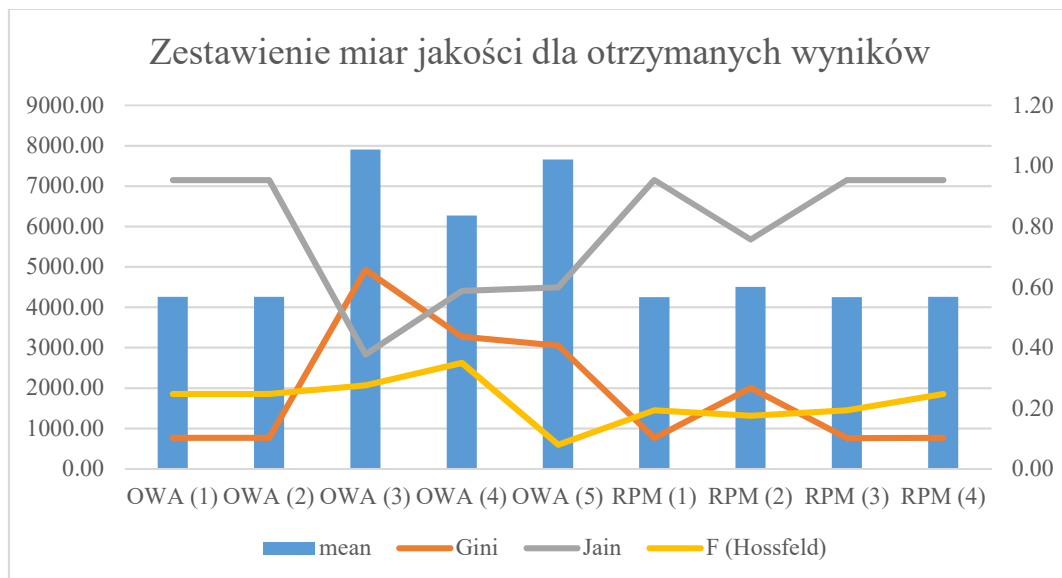
Tabela 4 Wartości obciążeń na zadanych zapotrzebowaniach na obciążenie (NL)

Metoda	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
OWA (1)	18	73	24	36	61	18	73	33	57	102
OWA (2)	18	73	24	36	61	18	73	33	57	102
OWA (3)	0	0	0	0	0	25	120	120	220	466
OWA (4)	9	36	12	18	30	30	172	66	109	300
OWA (5)	0	0	0	0	210	63	252	84	126	226
RPM (1)	18	73	24	36	61	18	73	32	60	100
RPM (2)	0	0	13	60	100	30	123	41	61	103
RPM (3)	18	73	24	36	61	18	73	32	60	100
RPM (4)	18	73	24	36	61	18	73	33	57	102

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki wyznaczonych miar jakości zilustrowano na wykresie (Rys. 7). Na osi poziomej odwzorowano kolejne metody i ich kolejne parametryzacje. Podczas poszukiwania rozwiązania sprawiedliwego należy kierować się kryterium równomierności rozkładu, ale również maksymalizacją wartości całkowitej lub średniej funkcji kryterium. Dla niektórych parametrów metoda uporządkowanych średnich ważonych daje rozwiązanie przypisujące dokładnie takie same wartości obciążeń jak metoda punktu odniesienia. Jest tak w przypadku wyraźnie wyróżniającej się wagi pierwszej względem zrównanych pozostałych wartości wag w metodzie OWA oraz w przypadku określenia odpowiednio niskich wartości krańców przedziału najbardziej pożądanego przez algorytm RPM. Są to wartości dążące do rozwiązania metody lexMAX, której priorytetem jest maksymalizacja wartości najmniejszej, a w drugiej kolejności

możliwie największe podwyższenie wartości sumarycznej zmiennych decyzyjnych. Metoda OWA przyjmuje rozwiązanie zbliżone do rozwiązania uzyskanego przy wykorzystaniu modelu lexMAX dla znacząco większej wartości przyjętej dla wagi pierwszej w stosunku do pozostałych wag. Odpowiedni dobór wag pozwala uzyskać spektrum rozwiązań. Należy jednak dobierać je w odpowiedni sposób. Na rozwiązanie wpływają nie tylko wartości poszczególnych wag, ale również różnice między kolejnymi wagami, jak również wartość danej wagi w odniesieniu do ich sumy. Przepisanie wag równych sobie odpowiada rozwiązaniu nie uwzględniającemu kryterium sprawiedliwości. Zbyt małe różnice między kolejnymi wagami również mogą prowadzić do rozwiązania dyskryminującego mniej atrakcyjne zapotrzebowania.



Rys. 7 Wykres przedstawiający obliczone miary jakości dla badanych metod..

Źródło: opracowanie własne.

Pierwszym wyznaczonym wskaźnikiem określającym jakość wybranych metod jest koszt sprawiedliwości POF. Dla poszczególnych iteracji badanych metod koszty sprawiedliwości przedstawiono w tabeli poniżej.

Tabela 5 Współczynniki jakościowe dla modeli OWA oraz RPM (NL)

Miara	OWA (1)	OWA (2)	OWA (3)	OWA (4)	OWA (5)	RPM (1)	RPM (2)	RPM (3)	RPM (4)
średnia	4258.33	4258.33	7900.00	6269.23	7660.00	4250.00	4503.13	4250.00	4258.33
G(y)	0.10	0.10	0.66	0.44	0.41	0.10	0.27	0.10	0.10
J(y)	0.95	0.95	0.38	0.59	0.60	0.95	0.76	0.95	0.95
POF	46.10	46.10	0.00	20.64	3.04	46.20	43.00	46.20	46.10
F(y)	0.25	0.25	0.28	0.35	0.08	0.19	0.18	0.19	0.25

Źródło: opracowanie własne.

Do obliczenia wskaźnika POF wyznaczono średnią wartości sumarycznych zysków z alokacji obciążeń dla kolejnych zapotrzebowań. Dla rozpatrywanej sieci wartości średniego przychodu z alokacji zasobów sieciowych dla modelu maksymalizującego wydajności oraz max-min wyniosły odpowiednio 7900 oraz 3666 jednostek. Podobnie do wyznaczenia wartości współczynnika Hossfelda ($F(y)$) oraz innych miar wykorzystano wartości zysków z alokacji. Wartości obciążeń (h_d) wpływają bezpośrednio na jakość połączenia. Badane modele przyjmują jako miarę wydajności zysk z poszczególnych alokacji zasobów sieciowych. W przypadku, gdy istotna jest wartość obciążeń, można zmodyfikować modele w prosty sposób przyjmując jednakowe zyski jednostkowe. Modele można również zmodyfikować tak, aby uwzględniały koszty, wprowadzając kolejne kryterium lub ograniczenie. Przedmiotem oceny są w tym wypadku modele sprawiedliwe, które odnoszą się do zysków, jakie na przykład może uzyskać serwis rozdzielający treści na kilku agentów (zapotrzebowania). W praktyce można tego typu zadanie porównać do przypadku serwisu internetowego, który udostępnia treści równolegle poprzez sieć o ograniczonych zasobach, którymi są ograniczone pojemności poszczególnych połączeń (łuków sieci).

Dla metody uporządkowanych średnich ważonych pominięto wynik odpowiadający rozwiązaniu prostej maksymalizacji, który został osiągnięty dla równych wag. Współczynnik POF może być jednak interpretowany w niejednoznaczny sposób. Nie zawiera on w swojej wartości informacji na temat stopnia sprawiedliwości badanej metody. Trudno jest stwierdzić, czy metody posiadające ten współczynnik o wartości mniejszej są tym samym mniej sprawiedliwe. Oczywiście celem, jaki przyświeca podczas tworzenia metody sprawiedliwej jest to, aby POF był jak najmniejszy, a wartości najbardziej dyskryminowanych alokacji zasobów były największe lub ich rozkład był najbardziej zrównany.

Metoda OWA wykazuje dobre własności w sterowaniu rozwiązaniem. Dla wag malejących i dodatnich osiąga się rozwiązanie, które bardzo dobrze godzi w sobie kryterium sprawiedliwości oraz maksymalizacji sumarycznego obciążenia ścieżek. Model OWA sprawdza się również w dużym stopniu dla zadań o charakterze dyskretnym. Dla równych wag otrzymuje się rozwiązanie tożsame z prostą maksymalizacją funkcji kryterium, co można wykorzystać między innymi do wyznaczania współczynnika sprawiedliwości, który jest jednym ze sposobów określenia jakości rozwiązania pod kątem maksymalizacji funkcji kryterium zadania. Dla rozpatrywanych przypadków oraz parametrów sterujących rozwiązaniem otrzymano koszt sprawiedliwości niższy dla metody uporządkowanych średnich ważonych. W porównaniu z metodą punktu odniesienia, metoda OWA pozwala się sterować

w bardziej przyjazny i intuicyjny sposób. Największe wartości średnie wyznaczane są oczywiście dla modeli nieuwzględniających sprawiedliwości lub uwzględniających ją w małym stopniu. Do podstawowych statystyk należy również odchylenie standardowe. Ta miara również określa miarę skupienia rozkładu, jednak jest to miara mniej wrażliwa na wartości bardziej odbiegające od średniej. Zbudowana jest ona bowiem na standaryzowanym momencie centralnym drugiego rzędu. Wymienione powyżej podstawowe statystyki odnoszące się do badanego zestawu wyników nie zawierają w sobie dość podstawowej własności. Jest nią założenie, że wynik przyjmujący wartość 0 dla co najmniej jednego z zapotrzebowań powinien zostać na wstępie określony jako niesprawiedliwy.

Obliczenia powtórzono również dla alternatywnej notacji ścieżka-łuk (LP z ang. link-path) oraz dokonano analizy pod kątem sprawiedliwości rozwiązania dla modeli OWA oraz RPM. Model bazujący na notacji ścieżka-łuk utworzono w celu potwierdzenia poprawności implementacji utworzonych modeli. Jednym z niezbędnych kroków, aby zastosować tę notację jest opracowanie macierzy incydencji łuków oraz ścieżek. W tym celu został napisany skrypt generujący odpowiednie dane wejściowe. Do przygotowania danych wejściowych wykorzystano język programowania Python w wersji 2.7 oraz bibliotekę GLPK wyposażone w pakiet umożliwiający rozwiązywanie modeli optymalizacji liniowej GlpSOL. Dla przedstawionej we wcześniejszej części pracy sieci telekomunikacyjnej wyznaczono takie same zapotrzebowania jak w przypadku notacji węzeł-łuk, zarówno dla modelu OWA jak i RPM.

Tabela 6 Wyniki dla modeli RPM oraz OWA dla notacji LP

<i>d</i>	OWA(1)	OWA(2)	OWA(3)	OWA(4)	OWA(5)	RPM(1)	RPM(2)	RPM(3)	RPM(4)
1	4660.13	4660.13	0.00	4660.13	4660.13	4660.13	6849.06	4879.76	4660.13
2	4660.13	4660.13	16800.00	4660.13	4660.13	4660.13	0.00	4879.76	4660.13
3	4660.13	4660.13	3000.00	4660.13	4660.13	4660.13	6849.06	4879.76	4660.13
4	5460.13	5460.13	11200.00	5460.13	5460.13	5460.13	4800.00	4800.00	5460.13
5	4660.13	4660.13	2700.00	4660.13	4660.13	4660.13	0.00	4879.76	4660.13
6	4660.13	4660.13	3000.00	4660.13	4660.13	4660.13	6849.06	4879.76	4660.13
7	4660.13	4660.13	1100.00	4660.13	4660.13	4660.13	6849.06	4879.76	4660.13
8	4660.13	4660.13	5000.00	4660.13	4660.13	4660.13	4000.00	4000.00	4660.13
9	4660.13	4660.13	10400.00	4660.13	4660.13	4660.13	4000.00	4000.00	4660.13
10	4660.13	4660.13	0.00	4660.13	4660.13	4660.13	6849.06	4879.76	4660.13
Σ	47401.29	47401.29	53200.00	47401.29	47401.29	47401.29	47045.28	46958.33	47401.29

Źródło: opracowanie własne

Rozwiązanie modelu maksymalizującego wydajność wykorzystując optymalizację jednokryterialną (EffMAX), nie jest akceptowalne, ponieważ pomimo iż zwraca wartości niezdominowane, jest wysoce niesprawiedliwe. Wartość średniego zysku z alokacji obciążeń na zapotrzebowaniach wyniosła 4740 jednostek. Model max-min pozwala otrzymać rozwiązanie, które maksymalizuje zysk najmniej opłacalnego żądania na alokację zasobów oraz przydziela jednakową wartość dla każdego z pozostałych zapotrzebowań. Nie nadaje się do wykorzystania w praktyce, natomiast wartość zwracana przez ten model może być wykorzystywana jako punkt odniesienia do porównania wyników innych metod lub też do określenia dolnej granicy wydajności systemu, jaka jest możliwa do uzyskania. Wartość ta jest wartością minimalną zysku, jaki można osiągnąć z alokacji zasobów na zapotrzebowaniach w przypadku wykorzystania modelu MMF czy lexMAX. W rozpatrywanym przypadku wartość rozwiązania max-min wyniosła 4660 jednostek. Rozwiązanie modelu max-min stanowi dolną granicę wartości funkcji kryterium, poniżej której wartość rozwiązania nie może spaść. Zapewniają to zdefiniowane ograniczenia. W taki sposób został on na przykład wykorzystany podczas analiz modeli ilorazowych, które są opisane w dalszej części pracy. Ważną bowiem jego cechą jest to, że wartości funkcji kryterium będącej sumą obciążeń poszczególnych ścieżek w przypadku tej metody nigdy nie przyjmują natomiast wartości równej 0, co gwarantuje wynik idealnie równy. Rozwiązanie zwracane przez model max-min może również zostać wykorzystane do wyznaczania wskaźników pozwalających na ocenę badanego modelu. Wyniki zadań sformułowanych przy pomocy modelu lexMAX również w każdym przypadku przypisują ścieżkom wartości większe niż 0. Jest to jednak rozwiązanie, które zwraca wartości optymalne pod kątem dominacji racjonalnej. Każde z rozwiązań osiągniętych tą metodą daje rozwiązania niezdominowane przez dodanie elementu maksymalizującego sumę wszystkich wartości funkcji odniesienia większych niż największa z najmniejszych wartości (rozwiązanie max-min). Wszystkie te zapotrzebowania, gdzie jest możliwe zwiększenie wartości alokacji są maksymalizowane w możliwie największym stopniu. Zgodnie z oczekiwaniami model OWA pozwolił wyznaczyć rozwiązania o lepszej wartości sumy obciążeń dla wyznaczonych ścieżek w grafie przy zachowaniu odpowiedniej sprawiedliwości. Zaobserwowano jednak rozwiązania, w których model uporządkowanych średnich ważonych daje rozwiązanie o wartości sumy obciążeń ścieżek mniejszej niż w przypadku modelu lexMAX. Wśród przykładów były również przypadki, gdzie rozwiązanie problemu przy pomocy maksymalizacji uporządkowanych średnich ważonych nie gwarantowało obciążenia dla niektórych ścieżek obciążenia większego od 0.

Tabela 7 Wartości alokacji obciążeń na zadanych zapotrzebowaniach dla modeli OWA oraz RPM w notacji LP

<i>d</i>	OWA (1)	OWA (2)	OWA (3)	OWA (4)	OWA (5)	RPM (1)	RPM (2)	RPM (3)	RPM (4)
1	42.36	42.36	0.00	42.36	42.36	42.36	62.26	44.36	42.36
2	38.83	38.83	140.00	38.83	38.83	38.83	0.00	40.66	38.83
3	46.60	46.60	30.00	46.60	46.60	46.60	68.49	48.80	46.60
4	68.25	68.25	140.00	68.25	68.25	68.25	60.00	60.00	68.25
5	51.78	51.78	30.00	51.78	51.78	51.78	0.00	54.22	51.78
6	46.60	46.60	30.00	46.60	46.60	46.60	68.49	48.80	46.60
7	42.36	42.36	10.00	42.36	42.36	42.36	62.26	44.36	42.36
8	46.60	46.60	50.00	46.60	46.60	46.60	40.00	40.00	46.60
9	58.25	58.25	130.00	58.25	58.25	58.25	50.00	50.00	58.25
10	46.60	46.60	0.00	46.60	46.60	46.60	68.49	48.80	46.60
Σ	370.0	429.1	390.0	376.7	448.0	370.0	395.6	341.4	370.0

Źródło: opracowanie własne

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach jednakową skutecznością charakteryzują się modele NL oraz LP. Należy jednak zaznaczyć, że dla modelu LP przygotowano oprogramowanie pozwalające na wygenerowanie wszystkich możliwych ścieżek w grafie, co pozwala przeszukiwać pełny zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Ograniczenie ścieżek może spowodować pogorszenie działania modelu i w efekcie zwrócenie wartości mniej atrakcyjnych pod względem wydajności w porównaniu do modelu NL. Dla porównania przedstawione zostały mierniki jakości rozwiązania pod względem wydajności takie jak koszt sprawiedliwości (POF) oraz współczynnik Hossfelda (F), które są liczone dla wartości zysków osiągniętych z alokacji zasobów na zadanych zapotrzebowaniach. Jest to spowodowane ograniczoną liczbą ścieżek wygenerowanych dla każdego z zapotrzebowań. Modele optymalizacji w notacji NL pozwalają na rozwidlanie się ścieżek każdorazowo w kolejnym napotkanym węźle. Notacja LP bazuje na wcześniej wyznaczonej ścieżce, która nie może ulec rozdzieleniu. Żądanie, do którego przydzielane są jednostki obciążenia, może być dzielone jedynie przez inne ścieżki, które zostały wcześniej wygenerowane. Problem może zostać rozwiązany przez generowanie dynamiczne ścieżek w trakcie procesu optymalizacji. Metodą na uzyskanie tego jest metoda generacji kolumn. Ten temat był poruszany w opracowaniach [38], natomiast nie należy do

zakresu badań poruszanych w pracy. Wyniki obliczeń wskazały na wiele zalet metody uporządkowanych średnich ważonych. Jedną z głównych zalet tej metody jest duża elastyczność pod względem sterowania wynikiem. Dla wag dodatnich oraz wklęsłego charakteru funkcji ocen, możliwy jest również zapis modelu w postaci programowania liniowego. Metoda OWA dzięki tym cechom pozwala na wyznaczenie w stosunkowo krótkim czasie obliczeń, rozwiązania satysfakcjonującego decydenta. Preferencje decydenta określają tutaj stopień chęci osiągnięcia rozwiązania bardziej sprawiedliwego, kosztem wartości sumy wszystkich obciążeń ścieżek grafu. Modelowanie tych preferencji odbywa się przy pomocy odpowiedniego doboru wag kolejnych wartości uporządkowanych funkcji oceny, odpowiadającej w niniejszej pracy wartościom obciążeń każdej z wygenerowanych ścieżek. Dobór wag o większych wartościach dla początkowych wartości funkcji skumulowanych będzie zbliżał rozwiązanie do rozwiązania maksymalizacji wartości minimalnej funkcji osiągnięcia (max-min). Dobór równych wag o większych wartościach przybliży rozwiązanie do rozwiązania maksymalizacji sumy wartości wszystkich funkcji osiągnięcia. Taki dobór wag nie daje bowiem większych szans żądaniom dyskryminowanym w procesie optymalizacji.

3 Modele ilorazowe dla sprawiedliwego rozdziału zasobów ograniczonych (RZO)

3.1 Modele dwukryterialne optymalizacji liniowej

Celem utworzenia nowych modeli optymalizacji liniowej było opracowanie metodyki uzyskiwania sprawiedliwych rozdziałów zasobów, które pozwalają na uzyskanie bardziej wydajnego rozwiązania dla zadań rozdziału zasobów między konkurującymi ze sobą aktywnościami. Modele opisane wcześniej, określone jako modele optymalizacji bezpośredniej, wymagają również wprowadzania wielu parametrów sterujących do uzyskania satysfakcjonującego rozwiązania. Badane modele OWA oraz RPM wymagają określenia takich parametrów dla każdej z m aktywności. W przypadku modelu OWA tymi parametrami są wagi natomiast dla metody RPM wartości współrzędnych punktu akceptacji (minimalnej wartości akceptowanej przez decydenta) oraz aspiracji (wartości, powyżej których wyniki nie wpływają już znacząco na poprawę oceny rozwiązania). Liczba parametrów wymaganych do określenia wynosi więc odpowiednio m oraz $2m$. Podczas opracowywania modeli ilorazowych drugim celem było ograniczenie tych parametrów do jednego lub dwóch, które odpowiadają poziomowi sprawiedliwości rozwiązania.

W tym rozdziale przedstawione zostały nowo utworzone modele dwukryterialne optymalizacji sprawiedliwej. Pierwszym optymalizowanym kryterium jest całkowita wydajność systemu, natomiast drugim sprawiedliwość rozwiązania. Zarówno pierwsze jak i drugie podejście jest bardzo szerokie i mało precyzyjne. W analizie systemowej jako wydajność rozumianych może być wiele czynników. Na przykład w problemach alokacji zasobów ograniczonych może to być średni zysk całkowity, średni czas obsługi klientów korzystających z systemu bądź ich liczba. Jako drugie kryterium optymalizacji, jakim jest sprawiedliwość, może być przyjętych wiele miar. Wiele z nich zostało opisanych w poprzednim rozdziale 2.1. W tej części pracy rozpatrzone zostały miary sprawiedliwości takie jak:

- średnia z k -najbardziej dyskryminowanych zapotrzebowań,
- współczynnik Giniego.

Opisane modele dwukryterialne dotyczą wyznaczenia optymalnego kompromisu pomiędzy kryteriami wydajności oraz sprawiedliwości rozwiązania. Takie rozwiązanie może zostać

osiągnięte przez optymalizację ilorazu takich miar. Przedmiotem badań jest zbiór zadań optymalizacyjnych, które można określić jako problemy alokacji zasobów ograniczonych (RZO). Jako przykład, podobnie jak w poprzednich rozdziałach, posłuży tutaj zadanie związane z alokacją obciążeń na zadanych zapotrzebowaniach w sieci. Dla możliwości analizy porównawczej modeli opisanych wcześniej wykorzystano tę samą topologię sieci, która składa się z 12 węzłów oraz 39 łuków (18 krawędzi). Nie należy jednak traktować tego przykładu jako jedyną instancję problemów decyzyjnych, gdzie wykorzystane mogą zostać opisane modele optymalizacji [17].

Jednym z celów opracowania nowych modeli ilorazowych było również zmniejszenie liczby parametrów wejściowych wymaganych do wprowadzenia w celu uzyskania pożądanego rozwiązania. Opisywane wcześniej modele OWA lub RPM, wymagały zmiany parametrów wag lub nadiru i punktu aspiracji dla każdego z zapotrzebowań osobno. Te metody sprawiedliwe, zwracają rozwiązania wyrównująco i anonimowo efektywne. W celu osiągnięcia pożądanego spektrum rozwiązań wymagane jest wykonanie obliczeń dla wielu konfiguracji tych parametrów. Jest to uciążliwe nawet dla niewielkiej liczby zapotrzebowań. Model ilorazowy może zostać przedstawiony w formie minimalizacji lub maksymalizacji. Głównym problemem jest występująca już w samej głównej funkcji kryterium nieliniowość zmiennych decyzyjnych. W celu rozwiązania tego problemu wykorzystano proste podstawienia matematyczne pozwalające na przekształcenie modeli do postaci liniowej. Opracowanie modelu ilorazowego należy rozpocząć od wyboru miary sprawiedliwości, która może dobrze opisać charakter tego kryterium w odniesieniu do badanego problemu. Do budowy modelu optymalizacji przyjęto funkcję kryterium, która odpowiada ilorazowi tych dwóch przeciwstawnych sobie kryteriów. Rozpatrzmy więc następujący model minimalizacji [58]

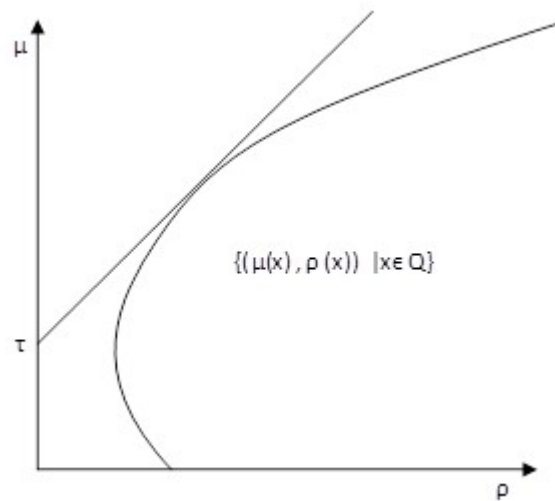
$$\min \left\{ \frac{\rho(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x}) - \tau} : x \in Q \right\} \quad (61)$$

Gwarantuje on uzyskanie sprawiedliwego rozwiązania uwzględniającego $\mu(\mathbf{x}) > \tau$ oraz $\rho(\mathbf{x}) > 0$. Dotyczy to w szczególności najbardziej dyskryminowanego zapotrzebowania. Podczas minimalizacji ilorazu licznik będzie dążył do wartości najmniejszej. Miara $\rho(\mathbf{x})$ utożsamiana jest ze stopniem niesprawiedliwości rozwiązania. W modelu jej zmniejszenie wpływa bezpośrednio na poprawę wydajności. Różnica $\mu(\mathbf{x}) - \tau$ rozumiana jest jako poprawa wydajności w stosunku do niesatysfakcjonującego pod tym względem rozwiązania wyjściowego. Zwiększenie $\mu(\mathbf{x})$ wpływa na zwiększenie współczynnika $\rho(\mathbf{x})$. Mamy więc do

czynienia z procesem, który w naturalny sposób dąży do osiągnięcia kompromisu pomiędzy tymi dwoma kryteriami oceny. W celu praktycznego zastosowania wprowadzono dodatkowo tolerancje ε oraz δ , które zostały uwzględnione w poniższej formule

$$\min \left\{ \frac{\rho(\mathbf{x}) + \varepsilon}{\mu(\mathbf{x}) - \tau} : \mu(\mathbf{x}) \geq \tau + \delta, x \in Q \right\} \quad (62)$$

W powyższym wzorze wartości ε oraz δ rozumiane są jako bardzo małe liczby wymierne (np. 0,0001). Pozwalają one na wymuszenie poprawy rozwiązania względem wartości średniego zysku z alokacji τ rozwiązania poprawianego, dopuszczając możliwość przyjęcia przez $\rho(\mathbf{x})$ wartości 0 oraz kontynuowanie optymalizacji wydajności systemu. Takie podejście jest zbliżone do koncepcji optymalizacji portfela inwestycyjnego przy wykorzystaniu współczynnika opisującego stosunek przyrostu zysku z inwestycji $\mu(\mathbf{x})$ względem rozwiązania najbardziej bezpiecznego τ do miary ryzyka $\rho(\mathbf{x})$ [59]. Miarą ryzyka może być odchylenie standardowe lub wariancja zmiennej. Takie miary wykorzystywane są między innymi w modelu Markowitza.



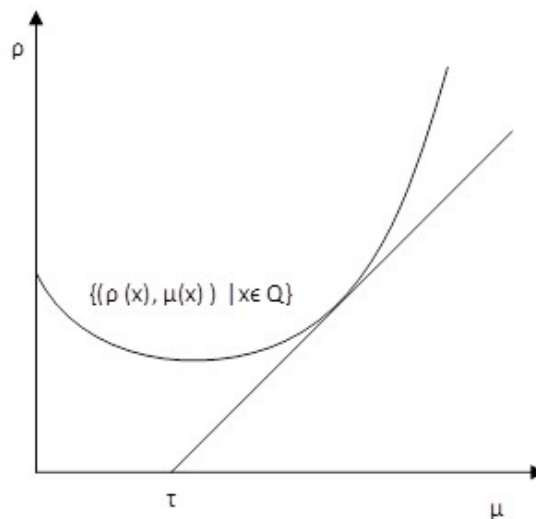
Rys. 8 Ilustracja zależności między optymalizowanymi miarami w modelu Markowitza.

Źródło: opracowanie własne.

Tak formułowane modele można określić jako maksymalizację wzrostu wydajności systemu w stosunku do możliwie najmniejszej utraty na sprawiedliwości rozwiązania. Takie sformułowanie zapisane może być następująco

$$\max \left\{ \frac{\mu(\mathbf{x}) - \tau}{\rho(\mathbf{x})} : \mathbf{x} \in Q \right\} \quad (63)$$

Podobnie do przypadku minimalizacji ilorazu optymalizowane kryteria zależą od siebie bezpośrednio. Wzrost wydajności wpływa na wzrost nierównomierności (niesprawiedliwości rozwiązania), natomiast warto wspomnieć, że funkcje $\mu(\mathbf{x})$ oraz $\rho(\mathbf{x})$ nie zależą od siebie liniowo. Powyższą zależność można przedstawić w przestrzeni decyzji Q tak jak na rysunku poniżej.



Rys. 9 Przykładowy zbiór rozwiązań dopuszczalnych Q wraz z prostą wyznaczającą rozwiązanie zadania optymalizacji w punkcie styku.

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku powyżej przedstawiono przykładową wizualizację procesu otrzymywania rozwiązania. Na tym przykładzie warto zauważyć, że parametrem wpływającym głównie na jakość rozwiązania jest parametr τ . Jest on utożsamiany z wartością funkcji kryterium opisującego jakość rozwiązania bez uwzględnienia sprawiedliwości. W przypadku problemu alokacji ograniczonych zasobów jest to suma zysków z alokacji każdej jednostki zasobu na danym zapotrzebowaniu lub wartość średnia z tych alokacji. Na osi pionowej przedstawiona jest wartość miary niesprawiedliwości/nierówności rozwiązania, na osi poziomej wartość funkcji określającej jakość rozwiązania (np. suma przychodów z alokacji jednostek zasobów na zapotrzebowaniach).

Problem związany z uwzględnieniem sprawiedliwości oraz równego traktowania każdego z punktów możliwej alokacji zasobów jest ważnym kryterium również w badaniach

związanych z ekonomią [60]. Można spotkać się z podejściem maksymalizacji funkcji o najmniejszym wpływie na poprawę wydajności systemu [11], jak również z minimalizacją typowych miar nierównomierności [42]. Przykładem takiej miary może być wskaźnik Giniego. Każde z tych podejść posiada swoje dobre jak i złe strony. Wpływa na to poziom skomplikowania samej implementacji metody, poziom sprawiedliwości lub stopień z jakim preferowana jest wydajność systemu, prędkość obliczeń, charakterystyka parametrów sterujących. Opisana w pracy metoda ma na celu uzyskanie rozwiązania, które najlepiej godzi w sobie sprawiedliwość i ogólną wydajność sieci. Rozpatrywany jest graf nieskierowany, o łukach $l \in \{1, \dots, L\}$, których maksymalna pojemność została określona jako c_l dla każdego z łuków. Problem dotyczy alokacji przepustowości na określonej ilości par zadanych węzłów, które określane są jako zapotrzebowania. Ich zbiór został oznaczony jako D . Każde zapotrzebowanie posiada węzeł początkowy (źródło) oraz końcowy (ujście) i zamiennie jest określane mianem ścieżki. Wprowadzono założenie na możliwość rozdzielania się (bifurkacji) ścieżek. Zapotrzebowania zostały dobrane w sposób umożliwiający zaistnienie problemu współdzielenia przez nie łuków oraz każdej z nich przypisano różne wartości przychodu jednostkowego z przedzielonego obciążenia. W rozpatrywanym przykładzie przyjęto zbiór 10 zapotrzebowań na przepustowość. Określono również wektor przychodów jednostkowych \mathbf{r} z alokacji obciążenia na d -tym zapotrzebowaniu. Wydajność systemu jest tym większa im większy przychód z przepuszczonego obciążenia zostanie osiągnięty. Problem optymalizacji można zapisać więc jako $\max\{f(d): d \in Q\}$, gdzie Q przedstawia całą przestrzeń decyzyjną, a funkcja $f(d)$ oznacza, w przypadku maksymalizacji wydajności, wartość przychodu dla podjętej decyzji ($f(d) = h_d r_d$). Do zmiennych decyzyjnych zaliczyć należy liczbę jednostek przydzielanego obciążenia dla d -tego zapotrzebowania h_d , jak również obciążenie na poszczególnych łukach x_l . Przyjęto, że wyżej wymienione zmienne mają charakter ciągły. Bezpośrednia maksymalizacja całkowitej wydajności sieci, nazywana modelem jednokryterialnej maksymalizacji całkowitej wydajności sieci, może zostać zapisana w postaci matematycznej w następujący sposób:

$$\max \sum_{d \in D} h_d r_d, \quad (64)$$

$$\sum_{l \in L} a_{nl} x_{ld} - \sum_{l \in L} b_{nl} x_{ld} = \begin{cases} h_d & \text{dla } n = s_d, \\ 0 & \text{dla } n \neq s_d, t_d, \forall n \in N, \\ -h_d & \text{dla } n = t_d, \end{cases} \quad (65)$$

$$\sum_{d \in D} x_{ld} \leq c_l, \forall l \in L. \quad (66)$$

Powyższe sformułowanie gwarantuje najwyższą możliwą wydajność wymiarowanego systemu. Nie uwzględnia ono jednak równego traktowania każdej ze ścieżek zapotrzebowań w sieci. Uwzględnia on, bowiem relację preferencji racjonalnej. Aby formułowany model uwzględniał sprawiedliwość powinien spełniać założenia relacji wyrównującej i anonimowej. Funkcja kryterium opisuje sumę wszystkich wartości przychodów z alokacji przepustowości, a celem zadania optymalizacji jest jej maksymalizacja. W modelu występują ograniczenia charakterystyczne dla sformułowania zadania w notacji NL. Dzięki takiemu sformułowaniu możliwe jest rozdzielanie się ścieżek. Takie sformułowanie pociąga za sobą konieczność zdefiniowania wśród danych wejściowych macierzy incydencji łuków z węzłami sieci. Elementy tej macierzy występują w modelu pod oznaczeniem a_{nl} – dla l -tego łuku wychodzącego z n -tego węzła oraz b_{nl} – dla l -tego łuku wchodzącego do n -tego węzła. Macierze incydencji przyjmują wartości binarne. Ostatnim i zarazem najbardziej intuicyjnym założeniem jest ograniczenie wartości sumarycznego obciążenia łuku grafu tak, aby nie przekroczyło ono jego pojemności. W pracy zaproponowano rozbudowę tego modelu o dodanie czynnika sprawiedliwości. Modyfikacji uległa funkcja kryterium, która maksymalizuje przyrost wartości funkcji związanej z efektywnością sieci z względem określonej wartości τ , rozumianej jako wartość maksymalnie sprawiedliwa. Wartość ta może zostać uzyskana z rozwiązania zadania optymalizacji modelu max-min, która posiada wysoki współczynnik kosztu sprawiedliwości (POF).

3.2 Dwukryterialny model ilorazowy uwzględniający k-najmniejszych wartości funkcji odniesienia

Rozpatrywanymi miarami, które są składnikami ilorazu w rozpatrywanym problemie sieciowym jest wartość poprawy funkcji celu maksymalizującej przychód z przydzielonego obciążenia na zadanych ścieżkach (zapotrzebowaniach) oraz składnik odnoszący się do wybranego procenta ścieżek najmniej dochodowych, który wpływa na sprawiedliwość rozwiązania. Wiąże się to z wykorzystaniem podejścia bazującego na analizie k-najbardziej dyskryminowanych wartości [39]. Model tego typu nazwano modelem maksymalizacji wydajności sieci ze względu na sprawiedliwość. W modelu ilorazowym uwzględniającym minimalizację wyróżniane są odmienne parametry sterujące, którymi w tym przypadku są parametr β oraz τ . Odpowiedzialne są one odpowiednio za procent szczególnie traktowanych zapotrzebowań generujących najmniejsze zyski całkowite oraz wartość funkcji reprezentującej jakość rozwiązania (całkowity zysk z alokacji jednostek zasobów na zapotrzebowaniach). Model optymalizacji będzie dopasowywał wartości zmiennych decyzyjnych w taki sposób, aby zwiększyć wartość funkcji kryterium odpowiedzialnej za wydajność. Wartość ta nie powinna być mniejsza niż wartość rozwiązania otrzymanego metodą max-min oraz nie większa niż otrzymana metodą maksymalizacji jednego tylko kryterium, odnoszącego się do maksymalizacji wydajności systemu lub innymi słowy maksymalizacji zysku z alokacji jednostek zasobów [61]. Model ilorazowy uwzględniający minimalizację stosunku wartości miary nierówności do straty na wydajności systemu (RBMIN) można zapisać w następujący sposób:

$$\min \frac{z_o + \epsilon}{z - \tau}, \quad (67)$$

$$z - u + \frac{\sum_{d \in D} k_d}{\beta m} = z_o, k_d \geq 0, \quad (68)$$

$$z = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} h_d r_d, h_d \geq 0, \forall d \in D, \quad (69)$$

$$k_d + h_d r_d \geq u, \forall d \in D, \quad (70)$$

$$z \geq \tau + \epsilon, \epsilon = \tau\beta, \quad (71)$$

$$\sum_{l \in L} a_{nl} x_{ld} - \sum_{l \in L} b_{nl} x_{ld} = \begin{cases} h_d & \text{dla } n = s_d, \\ 0 & \text{dla } n \neq s_d, t_d, \forall n \in N, \\ -h_d & \text{dla } n = t_d, \end{cases} \quad (72)$$

$$\sum_{d \in D} x_{ld} \leq c_l, \forall l \in L. \quad (73)$$

Zmienna z_0 jest odpowiedzialna w modelu za sprawiedliwość rozwiązania i opisuje miarę zadanego β -procenta wartości najbardziej dyskryminowanych z powodu najmniejszych przychodów całkowitych. Dla określonej wartości współczynnika β dotyczy ona określonego procenta wartości najbardziej dyskryminowanych przez rozwiązanie niesprawiedliwe. Zmienna z opisuje kryterium wydajności (średni przychód całkowity z rozdziału przepustowości na zapotrzebowania na ruch w sieci). W modelu wprowadzono dodatkowy wektor zmiennych \mathbf{k} , który dla d -tego zapotrzebowania określa stratę do rozwiązania maksymalnie wydajnego i niesprawiedliwego. W procesie optymalizacji każda wartość zmiennej k_d będzie dążyła do osiągnięcia wartości możliwie największej (dla wartości najbardziej dyskryminowanych), aby zwrócić szczególną uwagę na kryterium sprawiedliwości (wzrost wartości tej zmiennej wpływa również na wzrost wartości zmiennej u). Zmienna k_d , wpływa zatem na zapewnienie wzrostu wydajności przy jednoczesnym utrzymaniu zadanego poziomu sprawiedliwości i zwraca rozwiązanie będące kompromisem między zyskiem na wydajności (względem wartości τ), a stratą poniesioną przez zwiększenie β -procent wartości mniej przychodowych. Model wykorzystujący wymienioną miarę jako wskaźnik określający poziom wymagania na sprawiedliwość rozwiązania został można nazwać modelem optymalizacji ilorazu beta procent najbardziej dyskryminowanych wartości. Problem można określić w tym przypadku jako minimalizację wartości obniżenia jakości (całkowitej wydajności) systemu w stosunku miary niesprawiedliwości (nierówności) rozwiązania. Ze względu na nieliniowość występującą w funkcji kryterium niezbędne jest wykorzystanie następujących podstawień:

$$v = \frac{z}{z-\tau}, v_0 = \frac{1}{z-\tau}, \tilde{h}_d = \frac{h_d}{z-\tau}, \tilde{k}_d = \frac{k_d}{z-\tau}, \tilde{u} = \frac{u}{z-\tau}, \tilde{x}_{ld} = \frac{x_{ld}}{z-\tau}. \quad (74)$$

Po podstawieniach oraz po uproszczeniu zapisany może zostać w następujący sposób:

$$\min (v - \tilde{u} + \frac{\sum_{d \in D} \tilde{k}_d}{\beta m} + \epsilon v_0), \quad (75)$$

$$v - v_0 \tau = 1, \quad (76)$$

$$v = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} \tilde{h}_d r_d, \quad (77)$$

$$\tilde{k}_d + \tilde{h}_d r_d \geq \tilde{u}, \forall d \in D, \tilde{k}_d \geq 0, \quad (78)$$

$$1 \geq \epsilon \cdot v_0, \quad (79)$$

$$\sum_{l \in L} a_{nl} \tilde{x}_{ld} - \sum_{l \in L} b_{nl} \tilde{x}_{ld} = \begin{cases} \tilde{h}_d & \text{dla } n = s_d, \\ 0 & \text{dla } n \neq s_d, t_d, \\ -\tilde{h}_d & \text{dla } n = t_d, \end{cases} \quad (80)$$

$$\sum_{d \in D} \tilde{x}_{ld} \leq c_l v_0, \forall l \in L. \quad (81)$$

Parametr τ oznacza, jak wcześniej wspomniano, wartość funkcji określającej wydajność system dla rozwiązania najbardziej sprawiedliwego. Z tego powodu aby uzyskać rozwiązanie w modelu ilorazowym należy przeprowadzić wcześniej obliczenia w celu wyznaczenia tej wartości. Model max-min wykorzystywany w tym celu zapisywany jest w następujący sposób:

$$\max z, \quad (82)$$

$$z \leq h_d r_d, \forall d \in D. \quad (83)$$

W celu zwiększania wartości funkcji kryterium całkowitej wydajności system bez zmniejszania sprawiedliwości rozwiązania, model max-min z dodatkowym wyrażeniem związanym z kryterium całkowitej wydajności pozwala na maksymalizację najbardziej dyskryminowanej wartości, po czym zwiększa alokacje zasobów tam, gdzie to możliwe. Po personifikacji model taki wygląda następująco

$$\max(z + \sum_{d \in D} h_d r_d), \quad (84)$$

$$z \leq h_d r_d, \forall d \in D. \quad (85)$$

W opisywanych modelach ilorazowych jako wartość początkowa parametru τ (pierwsza iteracja podczas generacji spektrum rozwiązań) przyjęta została wartość modelu max-min nie rozbudowanego o dodatkowy czynnik sumy zwiększający wydajność rozwiązania. W modelu ilorazowym parametr β , odpowiedzialny za procent szczególnie traktowanych najmniej atrakcyjnych wartości funkcji kryterium może osiągać wartości ciągłe z zakresu $\langle 0;1 \rangle$. Ściślej mówiąc, im większa liczba z tego przedziału tym większa liczba szczególnie traktowanych wartości funkcji osiągnięcia. Należy jednak pamiętać również o tym, że 100% szczególnie traktowanych zapotrzebowań jest równoznaczne z tym, że żadne zapotrzebowanie nie będzie tak traktowane, a rozwiązanie zadania będzie równoznaczne z rozwiązaniem zadania jednokryterialnego nie biorącego pod uwagę sprawiedliwości rozwiązania. Podobnie jak każdy z przytoczonych w pracy modeli programowania liniowego może zostać zaimplementowany w środowisku optymalizacyjnym takim, jak na przykład CPLEX, GLPK, GUROBI lub innym.

W przedstawionym przykładzie jako środowisko optymalizacyjne został wybrany pakiet wykorzystujący pakiet optymalizacyjny CPLEX. Doświadczenia zostały przeprowadzone na kilku wcześniej opracowanych zbiorach danych wejściowych oraz zdefiniowanych parametrów sterujących rozwiązaniem. Pozwoliło to osiągnąć spektrum rozwiązań od najbardziej sprawiedliwego (najmniej wydajnego) do najbardziej niesprawiedliwego (najbardziej wydajnego). Jako rozwiązanie wysoce sprawiedliwe, określa się takie, które nie blokuje żadnego z rozpatrywanych zapotrzebowań, czyli każdemu z zapotrzebowań przyznawana jest wartość obciążenia większa niż 0. Kolejne wartości zysków jednostkowych zostały zawarte w tablicy $R=[200, 50, 150, 100, 60, 200, 50, 150, 100, 60]$. Wartość rozwiązania max-min dla tak dobranych wartości zysków jednostkowych wynosi 3667 jednostek. W poniższych tabelach zostały przedstawione wyniki, które odpowiadają ostatnim wysoko sprawiedliwym rozwiązaniom otrzymanym w procesie krokowego zwiększania wartości parametru τ . Odpowiada to najbardziej wydajnemu rozwiązaniu możliwemu do osiągnięcia przy zadanym β - części najbardziej dyskryminowanych zapotrzebowań na alokację zasobów sieciowych.

Tabela 8 Wyniki uzyskane dla modelu RBMIN (NL) dla kolejnych wartości parametru β , oraz wartości podstawowych statystyk obliczonych dla uzyskanego rozwiązania dla $\tau=3700$.

Miara	$\beta = 0.1-0.4$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.6-0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$
MF1	3666.67	5000	5000	5000	5000
MF2	3666.67	0	4000	0	4000
MF3	3666.67	5000	5000	5000	5000

MF4	6000	5000	5000	5000	5000
MF5	3666.67	5000	5000	5000	5000
MF6	3666.67	5000	5000	5000	5000
MF7	3666.67	4000	0	4000	0
MF8	6000	5000	5000	5000	5000
MF9	5000	5000	5000	5000	5000
MF10	3666.67	5000	5000	5000	5000
Odrzucone żądania	0	1	1	1	1
Średnia (H)	48.00	46.33	46.33	46.33	46.33
Przychód całkowity (R)	42666.67	44000.00	44000.00	44000.00	44000.00
Jain (H)	0.95	0.90	0.90	0.90	0.90
Gini (H)	0.10	0.12	0.12	0.12	0.12
F (Hossfeld) (R)	0.18	0.40	0.40	0.40	0.40
POF(R) %	45.99	44.30	44.30	44.30	44.30

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 9 Wyniki uzyskane dla modelu RBMIN (LP) dla kolejnych wartości parametru β , oraz wartości podstawowych statystyk obliczonych dla uzyskanego rozwiązania dla $\tau=3700$.

Miara	$\beta = 0.1-0.4$	$\beta = 0.5-0.8$	$\beta = 0.9$
MF1	3666.67	5000	5000
MF2	3666.67	2875	833.33
MF3	3666.67	5000	5000
MF4	6000	5000	5000
MF5	3666.67	5000	5000
MF6	3666.67	5000	5000
MF7	3666.67	1125	3166.67
MF8	6000	5000	5000
MF9	5000	5000	5000
MF10	3666.67	5000	5000
Odrzucone żądania	0	0	0
Średnia (H)	48.00	46.33	46.33
Przychód całkowity	42666.67	44000.00	44000.00
Jain (H)	0.95	0.92	0.92
Gini (H)	0.10	0.11	0.11
F (Hossfeld)	0.18	0.35	0.37
POF(R)	45.99	44.30	44.30

Źródło: opracowanie własne.

Miernikiem efektywności w zadaniach optymalizacji jest miara $y_d = h_d r_d$, która odnosi się do przychodu z alokacji h_d jednostek obciążenia z przychodem jednostkowym r_d dla d -tego żądania. Obliczenia zostały przeprowadzone dla kolejnych wartości parametru β od 0.1 do 0.9. Pozwoliło to osiągnąć różne konfiguracje rozwiązań wśród rozwiązań sprawiedliwych. Jest to niewątpliwie zaleta metody. Gdy β przyjmuje wyższe wartości, rozwiązanie traci na równości i zyskuje na wydajności. Parametr sterowania rozwiązaniem równy 1 odnosi się do prostej maksymalizacji wydajności systemu bez uwzględnienia kryterium rzetelności. W powyższej tabeli przedstawiono wyniki dla dziesięciu wartości parametru kontrolnego β dla danego wektora przychodów jednostkowych R . Dla każdego rozwiązania zostały również wyznaczone podstawowe statystyki, wykorzystane do ich oceny. System zyskuje na wydajności, gdy najbardziej opłacalne zapotrzebowanie zabiera więcej ładunku, czerpiąc zasoby z łączy używanych przez innych i doprowadzając do zagłodzenia łączy mniej przychodowych, które współdziela zasoby. Średnia podaje informację o całkowitej wydajności systemu i jest z nią ściśle powiązana. Dla wartości parametru τ równej 4300 jednostek każde z osiągniętych rozwiązań nie jest wysoce sprawiedliwe. Każde zwraca co najmniej 2 zapotrzebowania, które są zablokowane. Istotne jest również to że rozwiązania są jednakowo skuteczne przy wykorzystaniu modelu LP jak również NL. Rozwiązania różnią się jedynie delikatnie między sobą rozkładem obciążeń na wybranych zapotrzebowaniach, lecz końcowe wartości funkcji kryterium są ze sobą zbieżne. Do prezentacji dalszych obliczeń z tego względu przyjęto formułę NL. Zgodnie z oczekiwaniami rozwiązania otrzymane przy tak wysokiej wartości parametru τ wartości współczynnika Giniego są stosunkowo wysokie- wyższe niż 0.5 co jest może zostać uznane za wartość graniczną akceptowalności sprawiedliwości rozwiązania. Podobnie sytuacja wygląda z wartościami osiągniętymi dla indeksu Jaina, z tą różnicą że ten współczynnik jako miara równomierności dla kolejnych bardziej niesprawiedliwych rozwiązań przyjmuje wartości coraz mniejsze.

Tabela 10 Wyniki uzyskane dla modelu (NL) RBMIN dla parametru $\tau=4300$

Miara	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.5-0.6$	$\beta = 0.7-0.9$
MF1	32000	38000	22000	4571.43	12600	12600
MF2	0	0	0	0	0	0
MF3	4500	1500	4500	3428.57	12600	12600
MF4	6000	6000	6000	6000	13600	13600
MF5	0	0	0	3428.57	0	0
MF6	18000	12000	28000	42000	12600	12600

MF7	0	0	0	0	0	0
MF8	13500	16500	13500	6000	12600	12600
MF9	5000	5000	5000	5000	12600	12600
MF10	0	0	0	1028.57	0	0
Odrzucone żądania	4	4	4	2	4	4
Średnia (H)	48.00	48.00	48.00	48.00	55.60	55.60
Przychód całkowity	79000.00	79000.00	79000.00	71457.14	76600.00	76600.00
Jain	0.39	0.32	0.41	0.27	0.60	0.60
Gini	0.63	0.68	0.62	0.63	0.41	0.41
F (Hossfeld)	0.38	0.40	0.32	0.44	0.08	0.08
POF	0.00	0.00	0.00	9.55	3.04	3.04

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 11 Wyniki uzyskane dla modelu RBMIN (LP) dla parametru $\tau=4300$

Miara	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.5-0.6$	$\beta = 0.7-0.9$
MF1	38000	38000	36000	28571.43	12600	12600
MF2	0	0	0	0	0	0
MF3	9000	12000	12000	3428.57	12600	12600
MF4	6000	6000	6000	6000	13600	12600
MF5	0	0	0	3428.57	0	0
MF6	12000	12000	14000	18000	12600	12600
MF7	0	0	0	0	0	0
MF8	9000	6000	6000	6000	12600	12600
MF9	5000	5000	5000	5000	12600	12600
MF10	0	0	0	1028.57	0	0
Odrzucone żądania	4	4	4	2	4	4
Średnia (H)	48.00	48.00	48.00	48.00	55.60	54.60
Przychód całkowity	79000.00	79000.00	79000.00	71457.14	76600.00	75600.00
Jain	0.34	0.34	0.36	0.40	0.60	0.60
Gini	0.63	0.64	0.63	0.58	0.41	0.40
F (Hossfeld)	0.43	0.42	0.41	0.39	0.08	0.02
POF	0.00	0.00	0.00	9.55	3.04	4.30

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 12 Wyniki obciążeń (H) osiągnięte dla innych wartości parametru τ , ograniczone do rozwiązań silnie sprawiedliwych uzyskanych dla modelu RBMIN (NL)

Miara	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.5-0.9$
τ	4100	4100	4100	3800	3661
H1	92.31	110.00	9.23	18.33	18.33
H2	36.92	36.92	36.92	73.33	73.33
H3	12.31	12.31	12.31	24.44	24.44
H4	60.00	60.00	62.31	60.00	36.67
H5	30.77	30.77	30.77	61.11	61.11
H6	90.00	72.31	170.77	18.33	18.33
H7	36.92	36.92	36.92	73.33	73.33
H8	40.00	40.00	40.00	40.00	24.44
H9	50.00	50.00	52.31	50.00	36.67
H10	30.77	30.77	30.77	61.11	61.11
Średni przychód	6269.23	6269.23	6269.23	4266.67	3666.67

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 13 Wyniki obciążeń (H) osiągnięte dla innych wartości parametru τ , ograniczone do rozwiązań silnie sprawiedliwych uzyskanych dla modelu RBMIN (LP)

Miara	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.5-0.9$
τ	4100	4100	4100	3900	3700
H1	153.08	153.08	151.15	25.00	25.00
H2	36.92	36.92	36.92	41.67	57.50
H3	12.31	12.31	12.31	33.33	33.33
H4	60.00	60.00	60.00	60.00	50.00
H5	30.77	30.77	30.77	83.33	83.33
H6	29.23	29.23	31.15	25.00	25.00
H7	36.92	36.92	36.92	38.33	22.50
H8	40.00	40.00	40.00	40.00	33.33
H9	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
H10	30.77	30.77	30.77	83.33	83.33
Średni przychód	6269.23	6269.23	6269.23	4600.00	4400.00

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie wyników przedstawionych w tabeli 13 należy stwierdzić, że podczas wyznaczania spektrum rozwiązań optymalnych badaną metodą należy zwrócić uwagę również na drugi parametr sterujący, jakim jest parametr τ . W tabeli przedstawiono jedynie rozwiązania, które nie blokują żadnego żądania. Najbardziej atrakcyjne rozwiązania pod kątem kryterium wydajności zostały uzyskane dla zestawu parametrów β oraz τ równych odpowiednio (0.1, 4100), (0.2, 4100), (0.3, 4100) oraz (0.4, 3900). Dla wartości parametrów β oraz τ większych od odpowiednio 0.5 oraz 3900 nie uzyskiwano już rozwiązania silnie sprawiedliwego.

Omówiony w tym rozdziale model uwzględniający minimalizację ilorazu dwóch przeciwstawnych kryteriów może zostać zapisany również w formie maksymalizacji. Dla porównania w dalszej części rozdziału przedstawione zostały wyniki oraz sformułowanie problemu alokacji ograniczonych zasobów na przykładzie sieciowym dla podejścia maksymalizacji ilorazu dwóch przeciwstawnych kryteriów, jakimi są wydajność systemu oraz miara sprawiedliwości. Podobnie jak w przypadku wcześniejszym, jako miarę sprawiedliwości wybrano średnią z wartości obciążeń najmniej dochodowych zapotrzebowań. Wykorzystana została w tym celu sieć przedstawiona na początku rozdziału. Różnica w tym przypadku polega na zmianie podejścia na maksymalizację ilorazu dwóch przeciwstawnych kryteriów. Różnica zmienna z oraz parametru τ opisuje wzrost wydajności rozwiązania (poprawę względem zadanego rozwiązania, np. maxmin). Wektor zmiennych \mathbf{k} , którego wartość jest różna dla każdego d -tego zapotrzebowania umożliwia odpowiednie sortowanie wartości funkcji kryterium od najbardziej dyskryminowanych. W procesie optymalizacji każda wartość zmiennej k_d będzie dążyła do osiągnięcia wartości możliwie najmniejszej, aby zapewnić poprawne działanie modelu pod kątem miary sprawiedliwości jaką jest maksymalizacja β -procent wartości mniej przychodowych. Model matematyczny, który pozwala na zachowanie równowagi między efektywnością, a sprawiedliwością w sformułowaniu maksymalizacji (RBMAX) wygląda następująco:

$$\max \frac{z - \tau}{z_o}, \quad (86)$$

$$z_o = z - u + \frac{\sum_{d \in D} k_d}{\beta m}, k_d \geq 0, z_o > 0, \quad (87)$$

$$z = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} h_d r_d, \quad (88)$$

$$k_d + h_d r_d \geq u, k_d \geq 0, \forall d \in D, \quad (89)$$

$$\sum_{l \in L} a_{nl} x_{ld} - \sum_{l \in L} b_{nl} x_{ld} = \begin{cases} h_d & \text{dla } n = s_d, \\ 0 & \text{dla } n \neq s_d, t_d, \\ -h_d & \text{dla } n = t_d, \end{cases} \quad (90)$$

$$\sum_{d \in D} x_{ld} \leq c_l, \forall l \in L, \quad (91)$$

Podstawienia w celu linearyzacji modelu ilorazowego (maksymalizacja):

$$v = \frac{z}{z_0}, v_0 = \frac{1}{z_0}, \tilde{h}_d = \frac{h_d}{z_0}, \tilde{k}_d = \frac{k_d}{z_0}, \tilde{u} = \frac{u}{z_0}, \tilde{x}_{ld} = \frac{x_{ld}}{z_0}. \quad (92)$$

Model ilorazowy (maksymalizacja) po podstawieniach wygląda następująco:

$$\max v - \tau v_0, \quad (93)$$

$$v = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} \tilde{h}_d r_d, \quad (94)$$

$$v - \tilde{u} + \frac{\sum_{d \in D} \tilde{k}_d}{\beta m} = 1, \quad (95)$$

$$\tilde{k}_d + \tilde{h}_d r_d \geq \tilde{u}; \forall d \in D, \quad (96)$$

$$\sum_{l \in L} a_{nl} \tilde{x}_{ld} - \sum_{l \in L} b_{nl} \tilde{x}_{ld} = \begin{cases} \tilde{h}_d & \text{dla } n = s_d, \\ 0 & \text{dla } n \neq s_d, t_d, \\ -\tilde{h}_d & \text{dla } n = t_d, \end{cases} \quad (97)$$

$$\sum_{d \in D} \tilde{x}_{ld} \leq c_l v_0, \forall l \in L. \quad (98)$$

Każde z powyższych równań zostało podzielone przez zmienną z_0 . Taki zabieg pozwala zapisać funkcję kryterium jako maksymalizacja różnicy, eliminując nieliniowości (iloraz zmiennych), które występowały w poprzednim przypadku. Zmianie uległy również pozostałe ograniczenia związane z implementacją samego kryterium sprawiedliwości w metodzie oraz ograniczenia podstawowe na przepływ w sieci w notacji węzeł-łuk. Wykorzystany zabieg pozwalający na

wykorzystanie narzędzi programowania liniowego skutkuje potrzebą podzielenia każdej ze zmiennych wynikowych przez wartość v_0 .

Obliczenia przeprowadzono w środowisku CPLEX. Dla kilku przykładowych zbiorów danych wejściowych w pierwszej kolejności wyznaczono rozwiązanie modelu max-min. Model zapisany w postaci zadania maksymalizacji posiada ograniczoną dziedzinę. Dla poprawnego działania metody należy bowiem jako parametr τ podstawić wartość rozwiązania max-min. Jest ona traktowana jako wartość bazowa rozwiązania, która ma zostać poprawiona przy pomocy modelu ilorazowego. Następnie wykorzystano metodę maksymalizacji przychodu z alokacji obciążeń na zapotrzebowaniach ze względu na sprawiedliwość do poprawy otrzymanego rozwiązania. Dla opisanego struktury wartościami wejściowymi, którymi były wartości przychodów jednostkowych z alokacji obciążenia na danym zapotrzebowaniu nie uległy zmianie w stosunku do modelu max-min opisanego w poprzednim podrozdziale. Wartość obciążenia rozdzielonych zasobów sieciowych na zadanych ścieżkach przez model max-min była wartością współczynnika τ , sterującego rozwiązaniem w badanej metodzie. Wartość ta jest zbieżna z najmniejszą wartością uzyskaną przy pomocy modelu lexMAX. Drugim współczynnikiem metody jest współczynnik β określający procent zapotrzebowań najbardziej dyskryminowanych, które nie mogą ulec zagłodzeniu, podobnie jak w przypadku modelu RBMIN.

W zależności od preferencji bardziej lub mniej istotna jest również wartość średnia poszczególnych obciążeń. Wartości średniej i średniej geometrycznej są mało wrażliwe na zmiany równomierności rozkładu zaś miarą najbardziej wrażliwą pod tym względem jest odchylenie standardowe oraz współczynnik Giniego. Każdy ze sposobów analizy równomierności rozkładu pozwala stwierdzić, że najbardziej równomierne rozkłady wartości funkcji osiągnięcia zostały uzyskane dla pierwszych dwóch przypadków. Dla pierwszych iteracji oraz dla odpowiednio małego parametru sterującego β , rozwiązanie jest zbliżone do rozwiązania uzyskanego przez model lexMAX. Współczynnik β przyjmuje w tym przypadku wartości z zakresu $(0;1)$. Parametr ten odnosi się on do procenta najbardziej dyskryminowanych wartości, których wartość należy maksymalizować kosztem wartości bardziej efektywnych. W odróżnieniu do modelu RBMIN posiada on w tym miejscu ograniczenie i dla wartości 0 oraz 1 model nie zwróci żadnego rozwiązania. Przeprowadzona analiza pozwala stwierdzić, że badana metoda pozwala na uzyskanie rozwiązania optymalnego pod kątem równowagi między dwoma kryteriami, którymi są sprawiedliwość i całkowita wydajność systemu, podobnie jak w przypadku modelu RBMIN. Zasadniczym elementem jest wartość stałej τ , której błędne

określenie uniemożliwia otrzymanie rozwiązania. Wykorzystane podstawienie pozwalające na zapis modelu w postaci liniowej pociąga za sobą potrzebę wprowadzenia dodatkowych zmiennych będących ilorazami wartości zmiennych początkowych oraz zmiennej z_0 . Zabieg ten wpływa na komplikacje związane z wykorzystaniem powyższej metody do problemów dyskretnych lub całkowito-liczbowych. W przypadku potrzeby wprowadzenia takich założeń niezbędne jest wprowadzenie dodatkowych ograniczeń do modelu. Wyniki obliczeń dla testów modelu przedstawiono w poniższej tabeli. Metodologia wykorzystana do przeprowadzenia analizy wydajności modelu RBMAX jest identyczna jak w przypadku RBMIN. Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości parametru β od 0.1 do 0.9. W kolejnych tabelach, podobnie do poprzednio analizowanego przypadku (modelu RBMIN) przedstawiono wyniki obliczeń dla parametru τ równego 4400. Rozwiązania dla tej wartości cechują się jednak niskim współczynnikiem sprawiedliwości i w tym miejscu również zaistniała potrzeba wykonania obliczeń dla parametrów zawierających się pomiędzy tymi wartościami.

Tabela 14 Wyniki obliczeń dla modelu RBMAX (NL) dla wartości parametru $\tau=4400$

Miara	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.5-0.9$
MF1	32000	22000	26000	36000	12600
MF2	0	0	0	0	0
MF3	6000	12000	12000	3428.57	12600
MF4	6000	6000	6000	6000	13600
MF5	0	0	0	3428.57	0
MF6	18000	28000	24000	10571.43	12600
MF7	0	0	0	0	0
MF8	12000	6000	6000	6000	12600
MF9	5000	5000	5000	5000	12600
MF10	0	0	0	1028.57	0
Odrzucone żądania	4	4	4	2	4
Średnia (H)	48.00	48.00	48.00	48.00	55.60
Przychód całkowity	79000.00	79000.00	79000.00	71457.14	76600.00
Jain	0.39	0.41	0.42	0.33	0.60
Gini	0.62	0.61	0.61	0.60	0.41
F (Hossfeld)	0.39	0.33	0.28	0.44	0.08
POF	0.00	0.00	0.00	9.55	3.04

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 15 Wyniki modelu RBMAX (LP) dla parametru $\tau=4400$.

Miara	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.5-0.9$
MF1	14000	32000	32000	28571.43	12600
MF2	0	0	0	0	0
MF3	9000	9000	4500	3428.57	12600
MF4	6000	6000	6000	6000	13600
MF5	0	0	0	3428.57	0
MF6	36000	18000	18000	18000	12600
MF7	0	0	0	0	0
MF8	9000	9000	13500	6000	12600
MF9	5000	5000	5000	5000	12600
MF10	0	0	0	1028.57	0
Odrzucone żądania	4	4	4	2	4
Średnia (H)	48.00	48.00	48.00	48.00	55.60
Przychód całkowity	79000.00	79000.00	79000.00	71457.14	76600.00
Jain	0.36	0.40	0.39	0.40	0.60
Gini	0.63	0.62	0.63	0.58	0.41
F (Hossfeld)	0.42	0.39	0.38	0.39	0.08
POF	0.00	0.00	0.00	9.55	3.04

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 16 Wyniki osiągnięte dla innych wartości parametru τ , ograniczone do rozwiązań silnie sprawiedliwych uzyskanych dla modelu RBMAX

Miara	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.5-0.6$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$
τ	4100	4100	4100	3800	3700.0	3700.0	3700.0	4100.0
H1	136.15	119.23	82.31	18.33	25.00	25.00	25.00	25.00
H2	36.92	36.92	36.92	73.33	80.00	50.00	10.00	63.33
H3	12.31	12.31	12.31	24.44	33.33	33.33	33.33	33.33
H4	60.00	60.00	60.00	60.00	50.00	50.00	50.00	50.00
H5	30.77	30.77	30.77	61.11	83.33	83.33	83.33	83.33
H6	46.15	63.08	100.00	18.33	25.00	25.00	25.00	25.00
H7	36.92	36.92	36.92	73.33	0.00	30.00	70.00	16.67
H8	40.00	40.00	40.00	40.00	33.33	33.33	33.33	33.33
H9	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
H10	30.77	30.77	30.77	61.11	83.33	83.33	83.33	83.33
Średni przychód	6269.23	6269.23	6269.20	4266.67	4400.00	4400.00	4400.00	4400.00

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie wykonanych obliczeń należy stwierdzić że modele RBMIN oraz RBMAX zwracają bardzo zbliżone wyniki. Obydwie metody pozwalają na zwrócenie spectrum rozwiązań, spośród których decydent może wybrać rozwiązanie o określonym stopniu sprawiedliwości. Obydwa modele jako główny parametr sterujący posiadają współczynnik β , który odnosi się do liczby najbardziej dyskryminowanych żądań. Metoda RBMAX ze względu na kształt zbioru rozwiązań dopuszczalnych oraz prostej, której współczynnik kierunkowy odpowiada wartości tego parametru, dla jego wartości równej 1 nie zwraca rozwiązania. Podobnie jest w przypadku, kiedy za parametr sterujący τ przyjęta zostanie wartość mniejsza niż max-min. Pod tym względem metoda RBMIN posiada lepsze właściwości, ponieważ zwraca ona rozwiązanie w każdym z wymienionych przypadków.

3.3 Metoda ilorazowa optymalizacji sprawiedliwej uwzględniająca współczynnik Giniego jako miarę sprawiedliwości

W tym rozdziale przedstawiono opracowany model optymalizacji sprawiedliwej, który wykorzystuje indeks Giniego jako miarę sprawiedliwości [62]. W celu odpowiedniego przetestowania modelu został on opracowany według dwóch notacji opisu zasobów sieciowych: LP oraz NL. Głównym celem opisywanych w tej części pracy badań jest porównanie nowo opracowanego modelu ilorazowego wykorzystującego współczynnik Giniego jako miarę sprawiedliwości (RGM) z innymi modelami, które uwzględniają zasadę równości / sprawiedliwości. Poniżej przedstawiono model metody RGM, który został porównany z innymi modelami ilorazowymi RBMIN oraz RBMAX. Model RGM jest napisany w następujący sposób:

$$\min \frac{z_0 + \epsilon}{z - \tau}, \quad (99)$$

$$z_0 = \frac{\sum_{i \in D} \sum_{j \in D} q_{ij}}{2m^2}, \quad q_{ij} \geq 0, \quad (100)$$

$$z = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} h_d r_d, \quad h_d \geq 0, \quad (101)$$

$$z \geq \tau + \epsilon, \quad (102)$$

$$q_{ij} \geq h_i r_i - h_j r_j, \quad \forall i, j \in D, \quad (103)$$

$$q_{ij} \geq h_j r_j - h_i r_i, \quad \forall i, j \in D. \quad (104)$$

gdzie:

h_d – wartość obciążenia przypisanego do d -tego zapotrzebowania,

p_d – wartość przychodu uzyskanego z przydziału jednostki obciążenia na d -tym zapotrzebowaniu.

W modelu zmienna q_{ij} przyjmuje wartości nieujemne i została wprowadzona w celu umożliwienia zwrócenia wartości bezwzględnej z różnicy między każdą parą przychodów całkowitych uzyskanych z rezerwacji przepustowości na zapotrzebowaniu. Zmienna z określa funkcję odpowiadającą kryterium wydajności, które jest opisane przez średni przychód całkowity dla zapotrzebowań na rezerwację przepustowości w rozpatrywanej sieci. W modelu występują parametry ϵ oraz τ , z których pierwszy przyjmuje wartość odpowiednio małą (zapewniającą wymuszenie poprawy końcowej wartości kryterium wydajności, jeśli to tylko możliwe). Drugim parametrem jest natomiast wartość kryterium wydajności, która jest w procesie optymalizacji zwiększana, przy równoległym szczególnym uwzględnieniu miary odpowiadającej kryterium sprawiedliwości. W modelu to kryterium jest opisane przez zmienną z_0 i traktowane jako index Giniego zapisany w postaci przekształcenia umożliwiającego wykorzystanie go w bardziej efektywny sposób [63]. Podobnie jak w przypadku innych metod ilorazowych wymagana jest linearyzacja modelu, aby można go było wykorzystać przez typowe pakiety oprogramowania wykorzystujące metody optymalizacji liniowej. Model przekształcono przy użyciu następujących podstawień:

$$v = \frac{z}{z-\tau}, v_0 = \frac{1}{z-\tau}, \widetilde{h}_d = \frac{h_d}{z-\tau}, \widetilde{q}_{ij} = \frac{q_{ij}}{z-\tau}, \widetilde{x}_{dp} = \frac{x_{dp}}{z-\tau}. \quad (105)$$

Model ilorazowy RGM po wykorzystaniu powyższych przekształceń, może zostać zapisany w następujący sposób:

$$\min \frac{\sum_{i \in D} \sum_{j \in D} \widetilde{q}_{ij}}{2m^2} + \epsilon v_0, \quad (106)$$

$$v = \frac{1}{m} \sum_{d \in D} \tilde{h}_d r_d, \quad (107)$$

$$1 \geq v_0 \epsilon, \quad (108)$$

$$1 = v - \tau v_0, \quad (109)$$

$$\tilde{q}_{ij} \geq \tilde{h}_i r_i - \tilde{h}_j r_j, \quad \forall i, j \in D, \quad (110)$$

$$\tilde{q}_{ij} \geq \tilde{h}_j r_j - \tilde{h}_i r_i, \quad \forall i, j \in D. \quad (111)$$

Tabela 17 Wartości wektorów funkcji osiągnięcia posortowanych niemalejąco

Metoda	τ	β	Wektor posortowanych wartości przychodów całkowitych
RGM	2000	ND	[4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660]
RGM	4600	ND	[4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660]
RGM	4700	ND	[4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,5460]
RGM	4800	ND	[3697,3697,3697,3697,3697,3697,3697,4000,10400,11200]
RGM	4900	ND	[2155,4000,4000,4000,4000,4000,4000,4000,10400,11200]
RGM	5000	ND	[1934,1934,2215,3851,4000,4000,4000,9094,10400,11200]
RGM	5100	ND	[1636,1800,2364,2967,4000,4000,4000,10400,10400,11200]
RGM	5200	ND	[0,0,0,4000,4000,4400,6000,10400,11200,13200]
RBMIN	5200	0.3	[0,0,1800,2200,4000,4000,4000,10400,11200,15600]
RBMIN	5100	0.3	[2649,2649,2649,2649,2649,3057,4000,10400,10664,11200]
RBMIN	5000	0.3	[3697,3697,3697,3697,3697,3697,3697,4000,10400,11200]
RBMIN	4900	0.3	[3697,3697,3697,3697,3697,3697,3697,4000,10400,11200]
RBMIN	4800	0.3	[3697,3697,3697,3697,3697,3697,3697,4000,10400,11200]
RBMIN	4700	0.3	[4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,5460]
RBMIN	4600	0.3	[4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660]
RBMAX	4700	0.3	[4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,4660,5460]
RBMAX	4800	0.3	[3697,3697,3697,3697,3697,3697,3697,4000,10400,11200]
RBMAX	4900	0.3	[3697,3697,3697,3697,3697,3697,3697,4000,10400,11200]
RBMAX	5000	0.3	[3697,3697,3697,3697,3697,3697,3697,4000,10400,11200]
RBMAX	5100	0.3	[2649,2649,2649,2649,2649,2702,3645,10400,11089,11484]
RBMAX	5200	0.3	[0,0,1800,2200,4000,4000,4000,10400,11200,15600]

Źródło: opracowanie własne.

Do powyższych modeli dodane zostały również wymagane ograniczenia na przepływ dla dwóch notacji (NL oraz LP). Obliczenia wykonano dla kilku wartości parametru ϵ , który powinien mieć wystarczająco małą wartość. W obliczeniach przyjęto wartość 0,01. W procesie badania sprawdzono również wartości tego parametru równe 0,1 i 0,001, ale wyniki nie różniły się w znaczącym stopniu. W tabeli poniżej przedstawione zostały wartości wyjściowe uzyskane za pomocą notacji NL dla badanego modelu RGM.

Tabela 18 Wyniki statystyk i współczynników obliczonych dla opracowanych metod ilorazowych

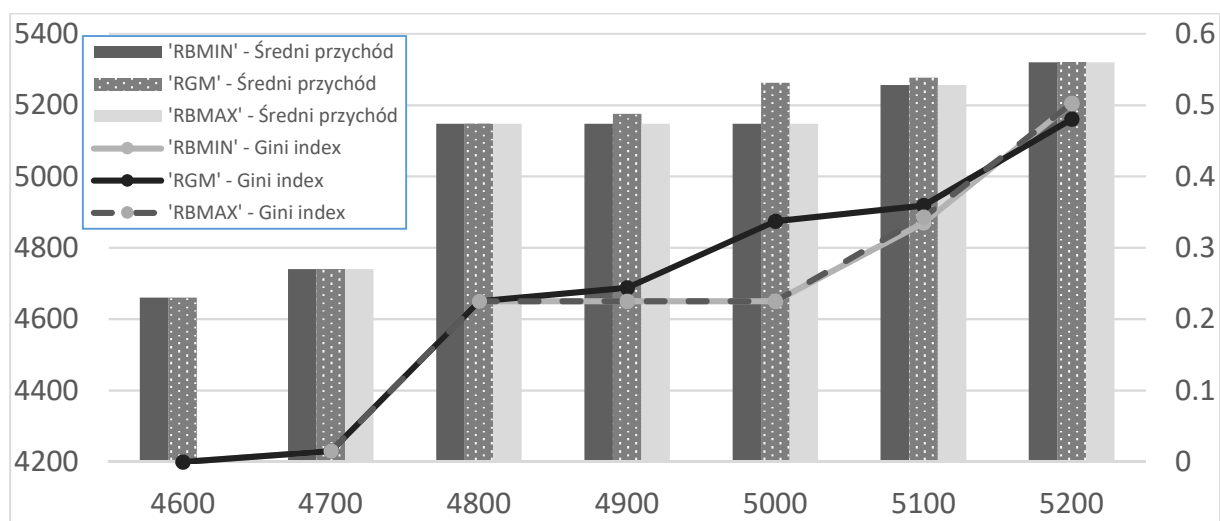
Metoda	τ	β	ϵ	POF	$\sigma(\mathbf{y})$	$\mu(\mathbf{y})$	G(y)	J(y)
RGM	2000	X	0.01	0.12	0.04	4660.13	0.00	1.00
RGM	4600	X	0.01	0.12	0.00	4660.13	0.00	1.00
RGM	4700	X	0.01	0.11	240.00	4740.13	0.02	1.00
RGM	4800	X	0.01	0.03	2833.20	5147.75	0.23	0.77
RGM	4900	X	0.01	0.03	2870.34	5175.45	0.24	0.76
RGM	5000	X	0.01	0.01	3384.53	5262.81	0.34	0.71
RGM	5100	X	0.01	0.01	3628.13	5276.67	0.36	0.68
RGM	5200	X	0.01	0.00	4606.26	5320.00	0.48	0.57
RBMIN	5200	0.3	0.01	0.00	5000.16	5320.00	0.50	0.53
RBMIN	5100	0.3	0.01	0.01	3625.38	5256.45	0.34	0.68
RBMIN	5000	0.3	0.01	0.03	2833.20	5147.75	0.23	0.77
RBMIN	4900	0.3	0.01	0.03	2833.20	5147.75	0.23	0.77
RBMIN	4800	0.3	0.01	0.03	2833.20	5147.75	0.23	0.77
RBMIN	4700	0.3	0.01	0.11	240.00	4740.13	0.02	1.00
RBMIN	4600	0.3	0.01	0.12	0.00	4660.13	0.00	1.00
RBMAX	4700	0.3	0.01	0.11	240.00	4740.13	0.02	1.00
RBMAX	4800	0.3	0.01	0.03	2833.20	5147.75	0.23	0.77
RBMAX	4900	0.3	0.01	0.03	2833.20	5147.75	0.23	0.77
RBMAX	5000	0.3	0.01	0.03	2833.20	5147.75	0.23	0.77
RBMAX	5100	0.3	0.01	0.01	3773.18	5256.45	0.34	0.66
RBMAX	5200	0.3	0.01	0.00	5000.16	5320.00	0.50	0.53

Źródło: opracowanie własne.

Obliczenia wykonane dla notacji LP oraz NL były ze sobą zbieżne. Świadczy to o poprawności zapisanych modeli optymalizacji. Dla metody maksymalizującej wydajność (przychód z przydzielenia zasobów sieciowych) oraz max-min wyniki średnich wartości przychodów wyniosły odpowiednio 5320 oraz 4660.13 jednostek. Modele ilorazowe cechują się łatwością w uzyskiwaniu kolejnych rozwiązań budujących spektrum rozwiązań dopuszczalnych od najbardziej do najmniej sprawiedliwego. Modele ilorazowe uwzględniające miarę k-najbardziej dyskryminowanych wartości wektora ocen (współczynnik β) posiadają dwa parametry sterujące. Analizując rozwiązania należy więc brać pod uwagę dwa wymiary. Pierwszym jest wartość współczynnika β , który jest stosunkowo trudny do określenia na początku procesu optymalizacji. Im większa wartość tego współczynnika to z jednej strony większy procent kolejnych ocen, które powinny być preferowane względem bardziej wydajnych, natomiast z drugiej strony jego zbyt duża wartość przestanie spełniać swoją funkcję. W skrajnym przypadku może osiągnąć wartość 100 procent, co sprowadzi rozwiązanie do maksymalizacji wszystkich wartości wektora ocen traktowanych tak samo szczególnie. Drugi parametr, odnoszący się do granicy minimalnej wartości miary wydajności (współczynnik τ) jest w modelu głównym współczynnikiem wykorzystywanym do osiągnięcia kolejnych rozwiązań zadania. Model RGM, który wykorzystuje współczynnik Giniego jako miarę sprawiedliwości, nie posiada w sobie żadnego parametru, co czyni model prostszym w wykorzystaniu. Do porównania modeli ilorazowych przyjęto wartość współczynnika $\beta = 0.3$ wyznaczoną na podstawie wyników analizy rozwiązań problemu opisanych w poprzednim rozdziale. Dzieląc wartości przychodów przez wartość dochodu jednostkowego związanego z odpowiednim żądaniem, możemy uzyskać dokładną wartość obciążenia, które powinno zostać przypisane do zadanego żądania, aby uzyskać analizowany wynik. Współczynniki Jaina i Giniego reprezentują miary równości i nierówności. Współczynnik Jain przyjmuje wartość 1, dla rozwiązania idealnie równego. Współczynnik Giniego jest odwrotnie proporcjonalny do indeksu Jaina. Zwraca wartość równą 0 dla najbardziej równomiernego rozkładu wartości.

Obliczenia wykonano dla trzech modeli wprowadzonych w poprzednich sekcjach. Porównanie pokazano dla modeli RBMIN, RBMAX i RGM. Dla opisanego problemu wykonano obliczenia, których wyniki wykorzystano do stworzenia wykresu przedstawionego na Rys. 10. Wykresy prezentują spektrum wyników uzyskanych w odniesieniu do danych parametrów wejściowych. Głównym celem jest osiągnięcie możliwie największej wartości dochodu uzyskanego z alokacji ładunku do określonych wymagań i utrzymanie wymaganego

poziomu sprawiedliwości. Aby określić wartość tego kryterium, obliczono współczynnik Giniego i przedstawiono go na wykresie. Wykresy przedstawione poniżej ilustrują zależności między wartościami głównych czynników oceny jakości dla rozpatrywanych kryteriów. Wartość współczynnika Giniego została zilustrowana za pomocą linii, której wartości są przedstawione na osi pionowej z lewej strony wykresu. Pierwszy wykres jest wykonywany dla notacji NL, a drugi dla LP. Na każdym wykresie przedstawiono spektrum wyników uzyskanych dla parametru sterującego τ każdą z porównywanych w tej części pracy metod. Po kilku iteracjach każda metoda osiąga punkt równowagi między dwoma kryteriami.



Rys. 10 Wyniki dla notacji NL

Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie, kolejne słupki odpowiadają iteracjom obliczeń, to znaczy wyznaczeniu rozwiązania zadania optymalizacyjnego dla odpowiednich wartości parametry τ . Wynik rozwiązania poprzedniego jest zarazem wartością tego parametru dla zadania w kolejnej iteracji. Analizując wyniki należy dojść do wniosku, że metoda RGM szybciej uzyskuje końcowy wynik. Dla tego modelu nastąpiło to w punkcie $\tau = 4900$. Zauważmy, że dla porównania metod wzrost średniej wartości dochodu spowodował znaczne pogorszenie równomierności rozkładu przypisanych wartości obciążeń. Jest to bardzo dobrze widoczne również dla ostatnich badanych wartości τ , gdzie wyniki otrzymane z wykorzystaniem modelu RGM są zarówno bardziej sprawiedliwe według indeksu Giniego, jak również bardziej efektywne pod kątem wydajności przede wszystkim w obszarze rozwiązań w ostatnich

iteracjach. Są to jednak rozwiązania, które blokują mniej atrakcyjne ścieżki. Dla notacji NL rozwiązanie wysoce sprawiedliwe zostało osiągnięte dla trzech pierwszych iteracji. Dla pierwszej iteracji model RBMAX nie zwrócił wartości rozwiązania. Jest to charakterystyczne dla modelu, który nie pozwala na osiągnięcie rozwiązania, gdy parametr τ przyjmuje wartość mniejszą niż wartość odpowiadająca średniej wartości przychodów rozwiązania modelu regularyzowanego max-min, a bardziej dokładnie lexMAX. W kolejnym kroku uzyskane rozwiązanie dla modelu RGM jest zarówno bardziej efektywne jak i bardziej sprawiedliwe. Dla kolejnej iteracji ten model pozwala osiągnąć rozwiązanie jeszcze bardziej efektywne. Współczynnik Giniego dla tego przypadku jest wprawdzie na nieco wyższym poziomie, jednak odpowiada on rozwiązaniu silnie sprawiedliwemu. W tym przypadku model RGM jest zarówno bardziej skuteczny, jak i bardziej korzystny pod względem wymiaru sprawiedliwości. Rozwiązania uzyskane z dwóch innych metod dają gorsze wyniki od pierwszej iteracji, natomiast dłużej utrzymują indeks sprawiedliwości na poziomie odpowiadającym rozwiązaniom silnie sprawiedliwym. Podsumowując, obliczenia wykonane dla $\tau = 4900$ są bardziej wydajne dla modelu RGM, który zachowuje sprawiedliwość. Końcowa wartość rozwiązania RGM dla $\tau = 5200$ daje w porównaniu do pozostałych analizowanych metod również rozwiązanie zarówno bardziej efektywne jak i sprawiedliwe, natomiast co najmniej jedno zapotrzebowanie jest w tym przypadku zagłodzone. Ostatnią wartością współczynnika, gdzie zwracane jest rozwiązanie silnie sprawiedliwe, jest 5100. Model RGM zwraca wartości bardziej atrakcyjne w każdym rozpatrywanym przypadku. Porównanie metod ilorazowych pozwala stwierdzić, że zależność między sprawiedliwością a wydajnością, nie jest liniowa.

3.4 Podsumowanie wad i zalet zastosowanych metod

Modele ilorazowe pozwalają uzyskać spektrum rozwiązań w sposób bardziej przyjazny dla operatora. Najkorzystniejsze wyniki pozwala osiągnąć model RGM, który pozwala sterować rozwiązaniem przy pomocy jednego parametru przez co pozwala na szybkie uzyskanie rozwiązania, które jest zarówno efektywne jak i atrakcyjne pod względem sprawiedliwości. Obserwacje zostały potwierdzone przez wykonanie obliczeń w dwóch notacjach (NL oraz LP). Wyniki otrzymane przy zastosowaniu każdej z wymienionych notacji są jednakowe, co potwierdza poprawność implementacji modeli. W przypadku notacji LP należy jednak mieć na uwadze potrzebę generacji ścieżek w grafie między zadanymi

zapotrzebowaniami, tak aby rozpatrzone zostały wszystkie możliwości przepływów. Wśród modeli ilorazowych najbardziej praktyczna okazała się metoda optymalizacji ilorazu z wykorzystaniem współczynnika Giniego. Optymalizowany w modelu iloraz pozwala osiągnąć rozwiązanie, które przedstawia kompromis między kryterium wydajności a sprawiedliwością rozwiązania. Opracowany model ilorazowy pozwolił na uzyskanie spektrum rozwiązań dla opisanego problemu decyzyjnego. Było to zadanie polegające na przydzieleniu wartości obciążeń na zadane zapotrzebowania, które współdzielą ze sobą zasoby, jakimi są luki badanej sieci. Optymalizowaną wartością jest z jednej strony wydajność sieci, to znaczy przychód z przydziału obciążeń. Z drugiej strony optymalizowana jest również miara współczynnika nierównomierności rozkładu wartości przychodów, jakim jest współczynnik Giniego. Przedstawiony przykład zastosowania metod odnoszący się do przypadku sieciowego nie jest jedynym możliwym zastosowaniem modeli sprawiedliwych. Mogą one zostać wykorzystane dla wielu innych instancji zadań, w których występuje problem rozdziału zasobów na zadane zapotrzebowania. Do takich zadań można zaliczyć problemy alokacji punktów obsługi, organizacji ruchu lotniczego czy kolejowego, harmonogramowania transportu i wiele innych. Nowo opracowane modele optymalizacji ilorazu są proste w implementacji, a przez wykorzystanie równań liniowych pozwalają uzyskać rozwiązanie w czasie rzeczywistym. Wszystkie przetestowane modele pod tym względem są bardzo wydajne również dla bardzo dużej liczby zmiennych.

4 Modele sprawiedliwego przydziału zasobów oraz algorytmy wyznaczania połączeń w sieciach niepełnych

4.1 Opis badanego problemu

4.1.1 Wprowadzenie do zagadnienia

Kolejnym obszarem badań przedstawionym w pracy jest wykorzystanie modeli optymalizacji sprawiedliwej dla bardziej rozbudowanej sieci opartej na danych rzeczywistych. Zadanie należy do grupy problemów grafowych o wysokiej złożoności obliczeniowej [64]. Struktura danych wejściowych jest odwzorowaniem sieci dostępowych operatorów telekomunikacyjnych działających na terenie Polski. Główną cechą badanej topologii jest jej rozmiar. Bardzo duża liczba węzłów sieci ogranicza możliwość zastosowania tradycyjnych modeli optymalizacji wykorzystywanych do jej wymiarowania, choć istnieje wiele opracowań związanych z problemem, które opisują metodykę pracy przy problemach wymiarowania sieci dostępowych [65], bezprzewodowych [66]. W pracy przedstawiono kilka alternatywnych podejść do wyzwań, które pojawiły się w trakcie prac nad rozwiązaniem zadanego problemu. Problem zestawienia połączeń między węzłami w sieci może być rozpatrywany przy wykorzystaniu metodyki najkrótszego drzewa rozpinającego [67]. W tym rozdziale opisane zostało podejście oparte na kilku krokach umożliwiających dotarcie do rozwiązania przez wykorzystanie algorytmów pozwalających na pracę na sieci niespójnej. Zaproponowana została również metodyka pracy związana ze wstępnym przetworzeniem danych wejściowych w celu zwiększania spójności badanej sieci. Do określenia połączeń między zadanymi węzłami wykorzystywane są algorytmy bazujące na algorytmach najkrótszej ścieżki oraz zadań z grupy problemów komiwojażera. Badanie złożoności obliczeniowej tej klasy problemów było przedmiotem analiz, których wyniki można znaleźć w opracowaniach [68]. Problem komiwojażera zaliczany jest do NP-trudnych, których rozwiązania nie można uzyskać w czasie wielomianowym przy wykorzystaniu obecnie znanych algorytmów obliczeniowych. W tym rozdziale opisane zostało wykorzystanie nowo opracowanych oraz istniejących modeli optymalizacji sprawiedliwej dla przydziału ograniczonych zasobów dla przypadku sieci, której struktura jest oparta na danych rzeczywistych. Są to dane, które zostały pozyskane z zasobów Instytutu Łączności w ramach działania Systemu Informacyjnego o Infrastrukturze Szerokopasmowej. W ramach Systemu zbierane były informacje na temat infrastruktury szerokopasmowej takiej jak punkty styku, węzły, łącza światłowodowe oraz miedziane wraz z ich charakterystyką. Dla celów bezpieczeństwa zostały one zanonimizowane w taki sposób,

aby nie było możliwe zidentyfikowanie w jednoznaczny sposób podmiotu, do którego należy określony element infrastruktury. Jak się okazało po wstępnej analizie, między wieloma węzłami brakuje wystarczającej liczby łuków. Bardziej dokładnie, topologia sieci oparta na danych surowych w większości przypadków nie pozwalała na uzyskanie połączenia między losowo wybranymi parami węzłów. Przyjęto więc strategię, która uwzględnia pracę na sieci o określonym stopniu niespójności, w celu ustalenia dostępnych ścieżek dopuszczalnych między zadanymi węzłami. Kryterium doboru ścieżek może być liczba przeskoków, to znaczy liczba węzłów pośredniczących ścieżki lub jej całkowita długość. Docelowo zadanie ma na celu alokację zasobów sieciowych na zapotrzebowaniach między zadanymi węzłami. Efektem końcowym zadania jest więc zwymiarowanie uzyskanej sieci połączeń między punktami przy wykorzystaniu modeli optymalizacji sprawiedliwej.

W pierwszej części zostaną przedstawione różne podejścia pozwalające na rozwiązanie problemu niespójności w grafie dużych rozmiarów. Przetworzenie danych w tym miejscu ma za zadanie dać możliwość na utworzenie topologii sieci między zadanymi punktami na terenie kraju. Przyjęto, że celem jest połączenie między sobą określonej liczby wybranych centrów przetwarzania danych (CPD) umiejscowionych na terenie Polski. Połączenia między centrami powinny spełniać warunki wysokiej dostępności, to znaczy należy zachować co najmniej jedno połączenie zapasowe, które podczas awarii jednego łącza pozwoli na kontynuowanie komunikacji. Dla wyznaczonej sieci połączeń między zadanymi węzłami w dalszej części zostały przedstawione wyniki działania modeli optymalizacji sprawiedliwej związanej z alokacją obciążeń na zapotrzebowaniach między wybranymi węzłami wygenerowanej sieci. Przetestowane zostaną zarówno nowo opracowane modele optymalizacji ilorazu, jak również wybrane modele optymalizacji sprawiedliwej, opisane w poprzednich rozdziałach pracy.

W literaturze napotykamy wiele opracowań modeli pozwalających na wymiarowanie sieci. Istniejące modele umożliwiają nie tylko na organizację ruchu na zadanych zapotrzebowaniach, ale również pozwalają w dynamiczny sposób planować zwiększanie pojemności wybranych łuków tak, aby końcowa wartość całkowitego obciążenia sieci była optymalna przy uwzględnieniu kosztów jej rozbudowy. W ogólnym ujęciu problem wymiarowania sieci uwzględniając również instalację dodatkowych łączy można opisać przy pomocy funkcji celu [38]

$$F = \sum_{l \in L} v_l y_l + \sum_{l \in L} \kappa_l u_l \quad (112)$$

gdzie:

κ_l - oznacza koszt dołączenia l -tego łuku,

u_l - oznacza dołączenie l -tego łuku do tworzonej sieci oraz posiada wartości logiczne (1 jeżeli łuk jest wykorzystywany w sieci, 0 w przeciwnym przypadku),

v_l - oznacza koszt wykorzystania l -tego łuku,

y_l - oznacza wykorzystanie l -tego łuku w sieci oraz przyjmuje wartości logiczne (1 jeżeli łuk jest wykorzystywany w sieci, 0 w przeciwnym przypadku).

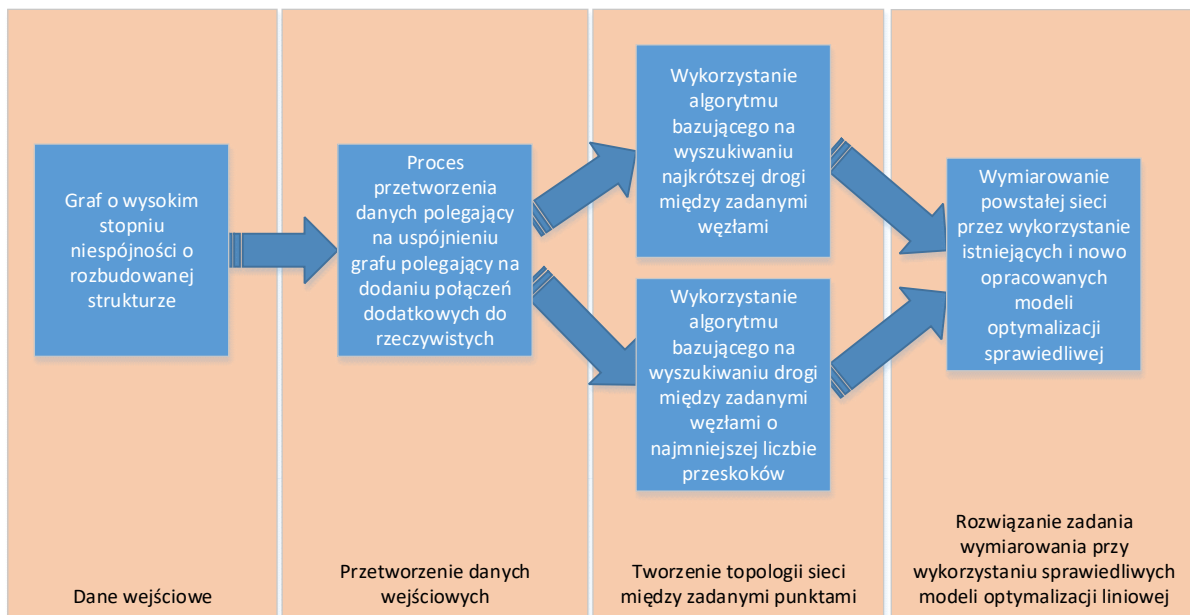
Modele, które są dokładnie opisane w zacytowanej pracy nie uwzględniają jednak dynamicznego dodawania łuków lub węzłów do sieci tam, gdzie taka procedura mogłaby być uzasadniona. W badanym przykładzie, który oparty jest na wykorzystaniu danych rzeczywistych, tego typu modele są trudne do wykorzystania w praktyce. Dwa główne problemy napotkane już na wstępie prac, którymi są niespójność oraz rozmiar sieci, uniemożliwiają lub znacznie utrudniają wykorzystanie tych modeli optymalizacyjnych w bezpośredni sposób.

Na wstępie należy doprecyzować pojęcie samej spójności i niespójności sieci. Stopień spójności sieci może określać współczynnik uwzględniający stosunek liczby połączeń istniejących w sieci pomiędzy węzłami, a wszystkimi możliwymi połączeniami pomiędzy węzłami. Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy, że sieć posiada krawędzie, to znaczy połączenie między węzłami odbywa się w dwóch kierunkach. Każda krawędź odpowiada dwóm łukom. W przypadku, gdy sieć zawiera $|N|$ węzłów, liczba wszystkich możliwych połączeń wynosi $\binom{|N|}{2} = \frac{1}{2}|N| \cdot (|N| - 1)$. O sieci spójnej w najwyższym stopniu – sieci nasyconej będziemy mówić, gdy pomiędzy każdym jej węzłem istniało będzie połączenie bezpośrednie. Sieć, w której między dowolną parą węzłów będzie istnieć połączenie, zawierające lub nie węzły pośredniczące będzie nazywana spójną w dopuszczalnym stopniu. Idąc dalej sieć, w której liczba połączeń (krawędzi) jest mniejsza niż liczba węzłów, będzie zawsze niespójna. W takim przypadku zawsze wystąpi sytuacja, kiedy co najmniej jeden węzeł nie będzie miał połączenia z resztą. Proces uspoźniania sieci powinien się rozpocząć od analizy posiadanych danych o jej infrastrukturze. Do określenia stopnia spójności wprowadzone zostaną miary określające procentowy stopień spójności:

- stosunek liczby połączeń istniejących w sieci pomiędzy węzłami do liczby wszystkich połączeń (krawędzi) między parami węzłów,

- stosunek liczby par węzłów między którymi istnieje połączenie bezpośrednio do liczby wszystkich połączeń,
- stosunek liczby par węzłów między którymi istnieje połączenie bezpośrednio lub pośrednio do liczby wszystkich możliwych połączeń.

Dwie pierwsze wymienione miary nie uwzględniają przypadku, w którym wszystkie węzły tworzyłyby strukturę, w której istnieją rozdzielne podsieci. W takim przypadku nawet, kiedy miary te przyjmowałyby stosunkowo duże wartości, mogłyby istnieć węzły, między którymi nie istniałoby żadne możliwe połączenie. Problem wyznaczenia połączeń w grafie niespójnym dotyczy przypadku, w którym sieć nie posiada wszystkich wymaganych połączeń, które gwarantowałyby możliwość poprowadzenia ścieżki pomiędzy dowolnie wybraną parą węzłów sieci. Wszystkie wymienione statystyki nie pozwalają jednak wprost na określenie, czy badana sieć pozwala na wyznaczenie połączenia między każdą losowo wybraną parą węzłów. Istnieją przypadki sieci złożonych ze skupisk węzłów połączonych ze sobą przez wiele połączeń, lecz nie powiązanych z innymi skupiskami nawet jednym połączeniem. W taki sposób tworzą się podsieci, w których bardzo łatwo znaleźć różne połączenia, lecz nie jest to tożsame z łatwością wyszukiwania połączeń w całej badanej sieci. Dla badanej sieci zostały wyznaczone statystyki, które pozwalają na ogólne określenie własności badanej sieci, które odnoszą się do liczby łuków wychodzących z kolejnych węzłów. Założono, że każda krawędź grafu ma charakter dwukierunkowy, to znaczy na każdą krawędź przypadają dwa łuki o przeciwnych zwrotach. Średnia liczba wychodzących krawędzi z każdego węzła wynosi 1,99. Wartość maksymalna liczby wychodzących krawędzi wynosi 1359 połączeń, liczba minimalna wynosi 1, natomiast odchylenie standardowe dla tej miary wynosi 4,65. W trakcie wyznaczania losowych połączeń między węzłami, w większości przypadków nie było zatem możliwe zestawienie połączenia pomiędzy wybranymi węzłami dla badanej sieci. W rozdziale zostały przedstawione koncepcje pozwalające na rozwiązanie zaistniałego problemu. W ogólnym zarysie zostały one przedstawione na Rys. 11.



Rys. 11 Metodyka podejścia do problemu niespójności

Źródło: opracowanie własne.

Na schemacie zilustrowane zostały grupy procesów, które zostały opracowane w ramach badań. Proces przetworzenia danych wejściowych jest realizowany na poziomie bazy danych. Polega on na generacji kolejnych połączeń w sposób inteligentny, to znaczy taki, który pozwala dodać połączenie pomocnicze wtedy, gdy wnosi ono znaczącą dla rozwiązania wartość. Połączenie pomocnicze nie powinno powielać połączeń istniejących. Proces ten powinien zakończyć się rezultatem, gdzie każda dowolnie wybrana para węzłów będzie mogła zostać ze sobą połączona ścieżką. Kolejna grupa procesów jest związana z generowaniem ścieżek w badanej sieci pomiędzy zadanymi punktami (CPD). Ścieżki są generowane przy wykorzystaniu dostępnych algorytmów [69]. Przykładem algorytmu realizującego zadanie wyszukania najkrótszego połączenia jest algorytm Dijkstry [70], który jest jednym najpopularniejszych rozwiązań. Jako kryterium wyboru ścieżki przyjęto dwie alternatywy: minimalizację liczby węzłów pośredniczących ścieżki oraz minimalizację całkowitej długości ścieżki. W kolejnych rozdziałach pracy zostaną przedstawione kolejne etapy prowadzące do zwymiarowania sieci między zadanymi punktami rozumianymi jako centra przetwarzania danych (CPD).

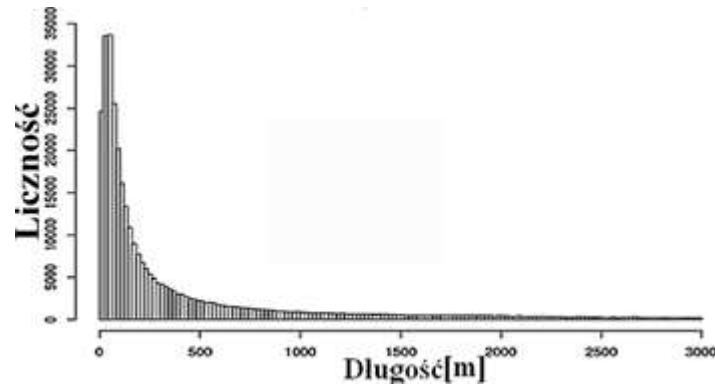
4.1.2 Charakterystyka danych wejściowych

Dane będące przedmiotem badań zostały oparte na danych rzeczywistych odpowiadających infrastrukturze światłowodowej na terenie Polski. Zostały one zaimportowane w postaci jednej tabeli zawierającej dane o krawędziach: szerokość i długość geograficzna punktów końcowego oraz początkowego. Dane są przechowywane w formie zanonimizowanej, to znaczy że nie ma możliwości określenia operatora, do którego należy element infrastruktury (węzła lub łuku). Są to dane przestrzenne, co oznacza że podstawowymi parametrami pozwalającymi na jednoznaczne określenie ich położenia są szerokość i długość geograficzna. W ramach wstępnego przetwarzania danych zostały one przefiltrowane pod kątem eliminacji duplikatów. Następnie spośród istniejących połączeń zostały zidentyfikowane węzły. Wstępna analiza wykazała, że w większość węzłów sieci jest jedynie początkiem lub końcem połączeń. W niewielu przypadkach węzły pełniły funkcję elementów pośredniczących. W celu rozwiązania problemu wysokiej niespójności opracowano algorytm pozwalający na generowanie połączeń dodatkowych, umożliwiających uspojnienie sieci. Stopień spójności rośnie wraz ze zwiększeniem liczby istniejących tras między dowolnymi dwoma węzłami, zatem zabieg dodania połączeń pomocniczych jest uzasadniony. Ze względu na potrzebę wyznaczenia dodatkowych, generowanych sztucznie połączeń pomocniczych, do zbioru łuków zostały dodane połączenia pomocnicze oznaczone atrybutem określającym, czy łuk jest linią wygenerowaną czy rzeczywistą.

Dane zaimportowane bezpośrednio dotyczyły sieci posiadających łuki w liczbie 345 663, które łączyły ze sobą 322 713 różnych węzłów sieci. Są to liczby, które zostały otrzymane po wstępnym wyczyszczeniu danych (między innymi eliminacji duplikatów). Już na samym wstępie analizy porównanie liczby połączeń oraz węzłów pozwala spodziewać się niskiej spójności badanej sieci. Sieć stanowi wyzwanie dla analiz głównie ze względu na ponad 320 000 węzłów. Taka liczba pozwala na wygenerowanie grafu o maksymalnej liczbie połączeń $322713 * 322712/2 = 52071678828$. Otrzymana liczba, większa niż 52 miliardy sprowadza zadanie generacji połączeń pomocniczych do problemu wymagającego dużego nakładu obliczeniowego. Dla takiej wartości nie jest możliwe rozpatrzenie wszystkich przypadków w akceptowalnym czasie. Algorytm wyznaczania połączeń pomocniczych nie może więc polegać na wyznaczeniu sieci pełnej. Opracowane algorytmy zwiększające spójność grafu zostały więc opracowane z założeniem wygenerowania określonej liczby połączeń pomocniczych dla każdego węzła, wymuszając to aby każde połączenie posiadało długość

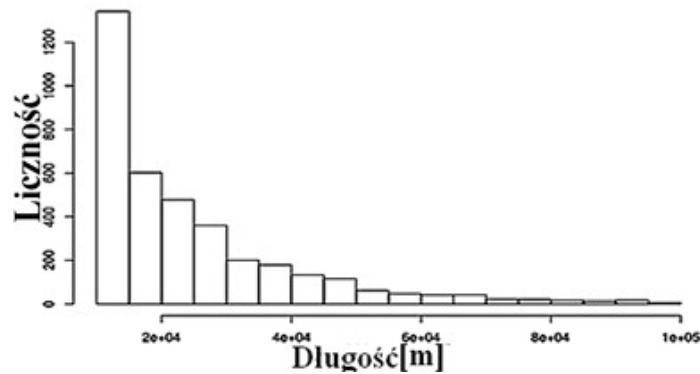
zawierającą się w ramach kolejnych przedziałów tolerancji. Podstawowe statystyki długości łuków dla badanej sieci wynoszą odpowiednio:

- średnia = 883.5 m,
- mediana = 155 m,
- wartość maksymalna = 99 701 m,
- wartość minimalna = 1 m.



Rys. 12 Histogram ilustrujący rozkład długości łuków przechowywanych w bazie, których długość jest mniejsza niż 3000m.

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 13 Histogram ilustrujący rozkład liczebności łuków o długości większej niż 10000m.

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione histogramy rozkładów miar długości połączeń wskazują na znaczącą liczbę połączeń krótkich w zakresie od 50 do 200 metrów. Takie połączenia stanowią około połowy wszystkich połączeń rzeczywistych. Taki rozkład wpływa również w tym przypadku na występowanie podsieci, które nie posiadają połączeń z pozostałą częścią węzłów. Wartość mediany jest ponad pięciokrotnie mniejsza, co powoduje prawoskośność rozkładu badanej próby.

4.2 Problem niespójności sieci i algorytmy pozwalające na wyznaczenie połączenia między zadaną grupą węzłów

4.2.1 Założenia przyjęte przy procesie przetworzenia danych wejściowych

W rozpatrywanych algorytmach przyjęto miarę główną, którą jest odległość między danymi węzłami. Rozwój informatyki w dziedzinie analizy danych przestrzennych daje bardzo duże możliwości [71]. Odległość między punktami może być liczona na różne sposoby. Pierwszym jest sposób uwzględniający między innymi krzywiznę Ziemi. Jednym z najbardziej popularnych podejść do uzyskania tej miary jest wykorzystanie formuły Haversine [72]. Po modyfikacjach wzór na odległość sferyczną może posiadać następującą budowę

$$d = \beta \arcsin \sqrt{0.5 - \frac{\cos[(lat_k - lat_p)\alpha]}{2} + \cos(lat_p\alpha)\cos(lat_k\alpha) \frac{1 - \cos[(lon_k - lon_p)\alpha]}{2}} \quad (113)$$

gdzie:

lat_p – szerokość geograficzna węzła początkowego,

lat_k – szerokość geograficzna węzła końcowego,

lon_p – długość geograficzna węzła początkowego,

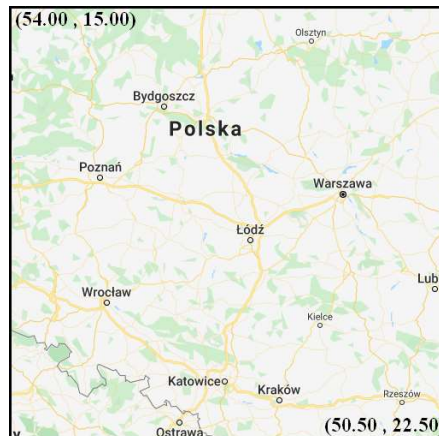
lon_k – długość geograficzna węzła końcowego,

$\beta = 12742$ – parametr obliczeniowy (dwukrotność promienia Ziemi),

$\alpha = 0.017$ – parametr obliczeniowy ($\pi/180$).

Drugim jest wzór uproszczony, zakładający dwuwymiarowy układ współrzędnych kartezjańskich bazujący na odległości między dwoma punktami płaszczyzny. W rozpatrywanych przypadkach ze względu na stosunkowo niewielkie odległości wykorzystano mniej rozbudowany wzór, pozwalający na przyspieszenie obliczeń. Wzór uwzględnia zróżnicowanie skali współrzędnych długości i szerokości geograficznej. Współczynnik 2.14 został wyliczony na podstawie wybranego fragmentu powierzchni mapy w kształcie kwadratu (Rys. 14). Jego wartość została wyliczona poprzez wyznaczenie stosunku pomiędzy różnicami wartości długości oraz szerokości geograficznej punktów skrajnych badanego obszaru w następujący sposób: $(22,5-15,0)/(54,0-50,5)=2,14$. Współrzędne długości

oraz szerokości geograficznej zostały opisane przy wykorzystaniu układu WGS 84 / EPSG:4326



Rys. 14 Przykład obrazujący proces oszacowania wartości parametru pozwalającego na równe traktowanie skali na osiach układu współrzędnych

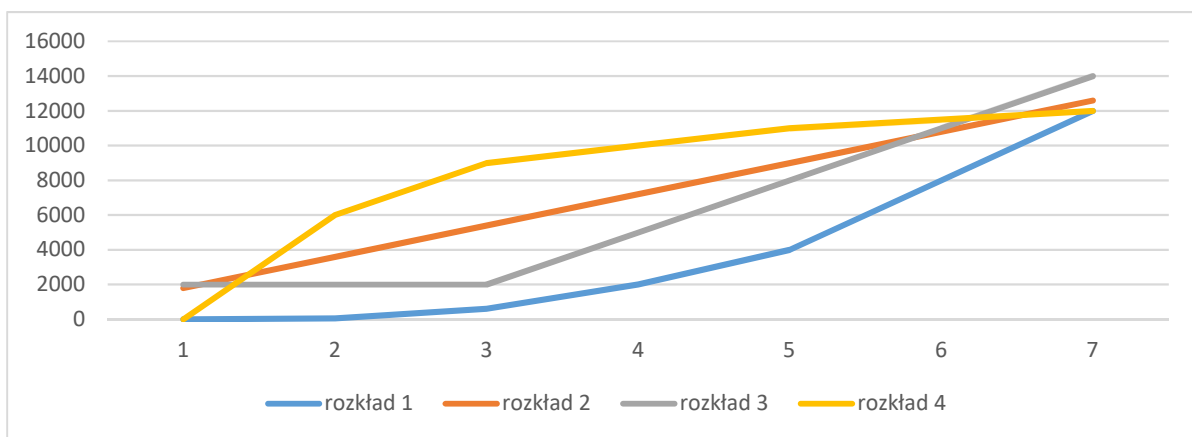
Źródło: Opracowanie własne.

Uproszczony wzór użyty do szacowania odległości między sąsiednimi węzłami ma następującą postać

$$d = \sqrt{2.14^2 (\text{lon}_k - \text{lon}_p)^2 + (\text{lat}_k - \text{lat}_p)^2} \quad (114)$$

Algorytm generacji połączeń pomocniczych uspojnających sieć, opiera się na wyznaczeniu dla kolejnych węzłów określonej liczby połączeń pomocniczych. W badanym przykładzie przyjęto, dla każdego węzła powinno zostać wyznaczonych co najmniej 5 takich połączeń. Algorytm działa na zasadzie pętli, w której obliczana jest odległość pomiędzy węzłem rozpatrywanym a potencjalnie możliwym do zbudowania połączenia pomocniczego. Jeżeli długość zawiera się w ramach jednego z 5 przedziałów tolerancji, takie połączenie pomocnicze jest tworzone oraz dołączane do zbioru wszystkich połączeń. W przypadku kiedy wszystkie przedziały otrzymają po jednym połączeniu pomocniczym, pętla jest zatrzymywana oraz rozpatrywany jest następny węzeł. Algorytm działa więc na zasadzie heurystyki. Bardzo duża liczba węzłów grafu uniemożliwia bowiem rozpatrzenie wszystkich możliwości połączeń w rozsądnym czasie. W rozpatrywanym podejściu do uspojnienia sieci, przy uwzględnieniu wspomnianych przedziałów tolerancji, wykorzystano kilka strategii różniących się między sobą sposobem doboru kolejnych wartości granicznych. Mówiąc bardziej dokładnie, podczas rozpatrywania kolejnych par węzłów obliczana jest odległość między nimi i sprawdzany jest

warunek, czy mieści się ona w podanym przedziale granicznym. W przypadku gdy dobierana byłaby najmniejsza odległość między węzłami, spójność nie malałaby. Odnosząc się do histogramów liczby przyjmowanych wartości, sieć w tym przypadku jest niespójna głównie z powodu braku połączeń dłuższych niż 5 km. Dodanie połączeń najkrótszych spowodowałoby zwiększenie spójności podsieci, które nadal byłyby rozłączne. Algorytm doboru kolejnych połączeń pomocniczych powinien więc zakładać wymuszenie wyznaczenia dla każdego z węzłów połączeń pomocniczych, których długość znajduje się w zadanym zakresie tolerancji. Przyjęto, że dla każdego węzła należy dobrać co najmniej 5 połączeń pomocniczych. Zmiana zakresu tolerancji następowała przez zmianę lewych i prawych krańców przedziałów (prawy kraniec n -tego przedziału jest zarazem lewym krańcem $n+1$ -go przedziału). Dobór wspomnianych wartości granicznych nastąpił przez dobór określonego rodzaju przyrostu. Zostały w tym celu rozpatrzone cztery różne charaktery przyrostu przedziałów tolerancji, dla kolejnych wyznaczanych połączeń (Rys. 15). Jako rozkład docelowy wybrano rozkład typu 1 na podstawie przeprowadzonych testów, które polegały na wyznaczeniu kilkunastu losowych połączeń między dwoma losowymi węzłami sieci oraz empiryczną ocenę rozwiązania. Wybrany do algorytmu rozkład preferuje połączenia pomocnicze, które są bardziej oddalone od kolejno rozpatrywanych węzłów początkowych. Posiada on charakter logarymiczny kolejnych granic przedziałów tolerancji.



Rys. 15 Rozpatrzone zakresy przedziałów dla tolerancji długości doboru połączeń pomocniczych

Źródło: opracowanie własne.

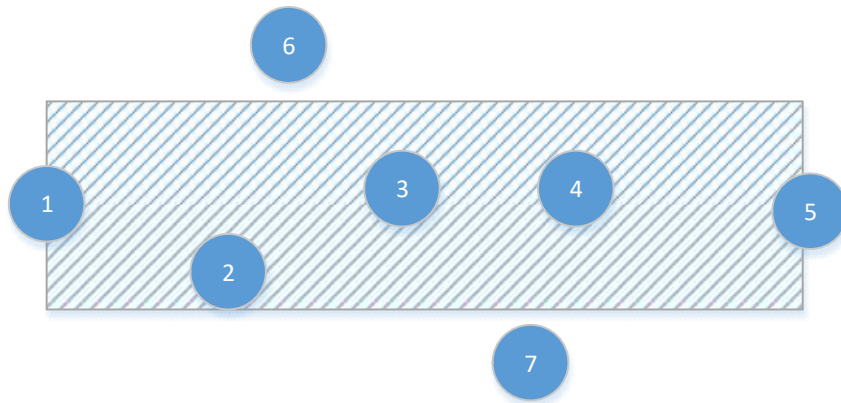
Aby dodatkowo usprawnić algorytm, zaproponowano grupowanie węzłów na określoną liczbę obszarów. Wprowadzenie indeksacji usprawnia w dużym stopniu proces wyszukiwania odpowiednich węzłów. W badanym przykładzie przyjęto 100 obszarów grupujących badane

węzły. Proces uspojniania sieci polegał na wyznaczaniu kolejnych połączeń pomocniczych między węzłami należącymi do obszaru. Pozwoliło to zmniejszyć złożoność obliczeniową i przyspieszyć obliczenia. Wersja docelowa algorytmu została zaimplementowana jako funkcja języka kwerend SQL w bazie PostgreSQL.

4.2.2 Zestawienie połączeń

Podczas wyznaczania ścieżek między zadanymi węzłami sieci spójnej można korzystać z szeregu algorytmów opracowanych w tym celu. Mogą to być algorytmy heurystyczne lub deterministyczne. Do najczęściej stosowanych algorytmów deterministycznych stosowanych do zadań wyszukiwania ścieżki optymalnej zaliczyć można algorytm Dijkstry [69] lub Bellmana-Forda [69]. W badaniach, do wyznaczania ścieżek optymalnych wykorzystano implementację algorytmu Dijkstry [70]. Opracowano metody wyznaczania sieci między kilkoma węzłami na zasadzie budowy topologii magistrali, pierścienia oraz przy założeniu redundancji ścieżek.

Opisane w tej części pracy strategie przyjęte do rozwiązania problemu związanego z zestawieniem połączeń między zadanymi węzłami sieci opierają się na założeniu, że badana sieć jest spójna w minimalnym stopniu, to znaczy między każdą parą dowolnie wybranych węzłów możliwe jest poprowadzenie ścieżki. W pierwszej z rozpatrywanych strategii, w pierwszym kroku należy wyznaczyć jedną ścieżkę między skrajnymi węzłami, której każdy łuk posiada przepustowość zapewniającą przesłanie odpowiedniej wielkości obciążenia. W tym procesie do wyznaczenia ścieżki wykorzystywany jest algorytm Dijkstry. Tak wyznaczoną ścieżką nazwijmy jako ścieżkę główną magistrali. Niech ta ścieżka dodatkowo przechodzi przez maksymalnie największą liczbę węzłów zadanych, które będą węzłami pośredniczącymi dla ścieżki głównej. Reguły, według których dobierane są węzły pośredniczące, są następujące. Odległość od prostej łączącej węzły skrajne nie powinna być większa niż określona część odległości od węzłów skrajnych. Nazwijmy tę odległość szerokością korytarza. Gdy poprowadzimy dwie proste równoległe do wyznaczonej, powstanie obszar prostokąta. Węzły zawierające się w tym obszarze zaliczane zostają do węzłów zadanych, pośredniczących. Idea została przedstawiona na rysunku 18.



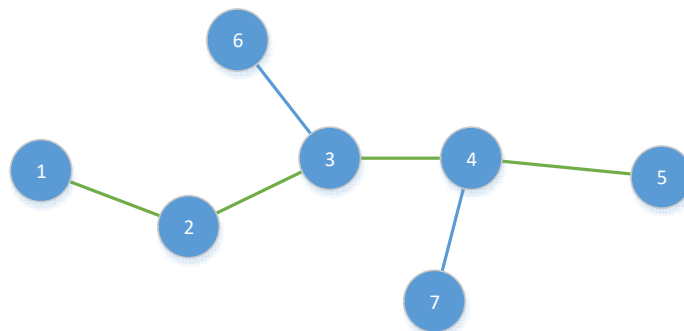
Rys. 16 Obszar korytarza dla węzłów zadanych- pośredniczących dla drogi głównej

Źródło: opracowanie własne.

Ścieżka główna to najkrótsza możliwa ścieżka spełniająca ograniczenie przepustowości między węzłami skrajnymi, przechodząca przez węzły zadane - pośredniczące. Pozostałe węzły zostaną dołączone do drogi głównej możliwie najkrótszym połączeniem. Do kolejnych kroków postępowania należą:

- wyznaczenie dwóch węzłów skrajnych,
- poprowadzenie linii prostej między nimi.

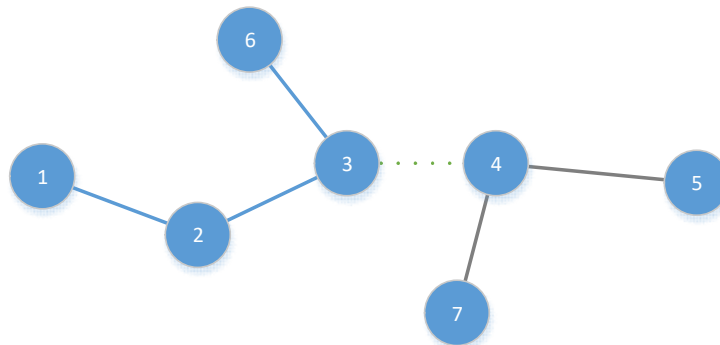
Wyznaczenie węzłów pośrednich dla drogi głównej - zasady, według których dobierane będą węzły pośredniczące dla drogi głównej, określone zostały wcześniej. W następnej kolejności dowiązywane są do drogi głównej pozostałe wierzchołki zadane. Utworzona w ten sposób sieć posiada topologię magistrali.



Rys. 17 Przykład rozwiązania dla strategii 2, gdzie 6, 7 są węzłami dołączonymi do drogi głównej możliwie najkrótszą drogą spełniającą wymagania przepustowości.

Źródło: opracowanie własne.

Taka strategia preferuje rozwiązanie, w którym sumaryczna długość wszystkich łączy jest możliwie najmniejsza. Tak powstała topologia sieci nie zakłada jednak redundancji połączeń. Posiada ono cechy połączenia szeregowego na ścieżce głównej magistrali.



Rys. 18 Awaria łącza skutkująca brakiem łączności między niektórymi węzłami

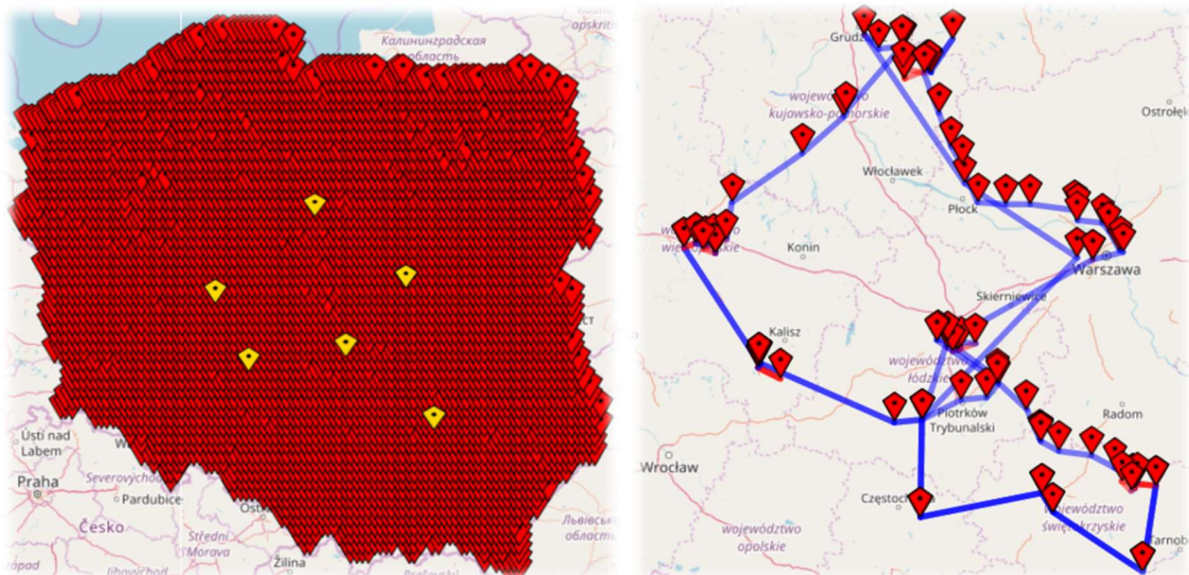
Źródło: opracowanie własne.

Tak jak przedstawiono na rys. 20, łuk łączący węzły 3 i 4 zawiera się w ścieżce głównej. Jego awaria skutkuje brakiem możliwości zapewnienia transmisji między większością par węzłów. W przypadku utraty łącza nie zawierającego się w ścieżce głównej, na przykład między węzłami 4 i 7 skutki nie są tak poważne, niemniej jednak węzeł 7 w tym przypadku jest nieosiągalny dla pozostałych. Wnioskując, dla takiego podejścia niezbędne jest zapewnienie gotowości organizacji odpowiednich czynności obsługi technicznej, zachowanie sieci w należyтым poziomie jakości. Czynności konserwacyjne muszą być dokonywane znacznie częściej, niż w przypadku rozwiązania wcześniejszego. Należy więc wprowadzić większą ochronę sieci przed skutkami uszkodzeń linii. Polega ona na doprowadzeniu połączeń zastępczych, posiadających wymaganą przepustowość. Zasada, jaką powinno się przyjąć, aby zapewnić to wymaganie, to zapewnienie możliwości połączenia każdej pary węzłów co najmniej na dwa sposoby. Dla uzyskania rozwiązania należy dodać połączenia zastępcze. Do uzyskania rozwiązania rozpatrzone powinny zostać wszystkie możliwe rozwiązania dla połączeń zastępczych. Połączenia zastępcze wybierane są ze zbioru dróg optymalnych. Sieć zaprojektowana w ten sposób posiada zwiększoną ochronę przed skutkami awarii jednego z połączeń, minimalizując przy tym całkowitą długość linii.

W celu wizualizacji otrzymanych rozwiązań dla opracowanych algorytmów został opracowany i zaimplementowany interfejs graficzny pozwalający na wybór punktów wymagających połączenia (CPD) przy wykorzystaniu modułu mapowego. Główna zasada

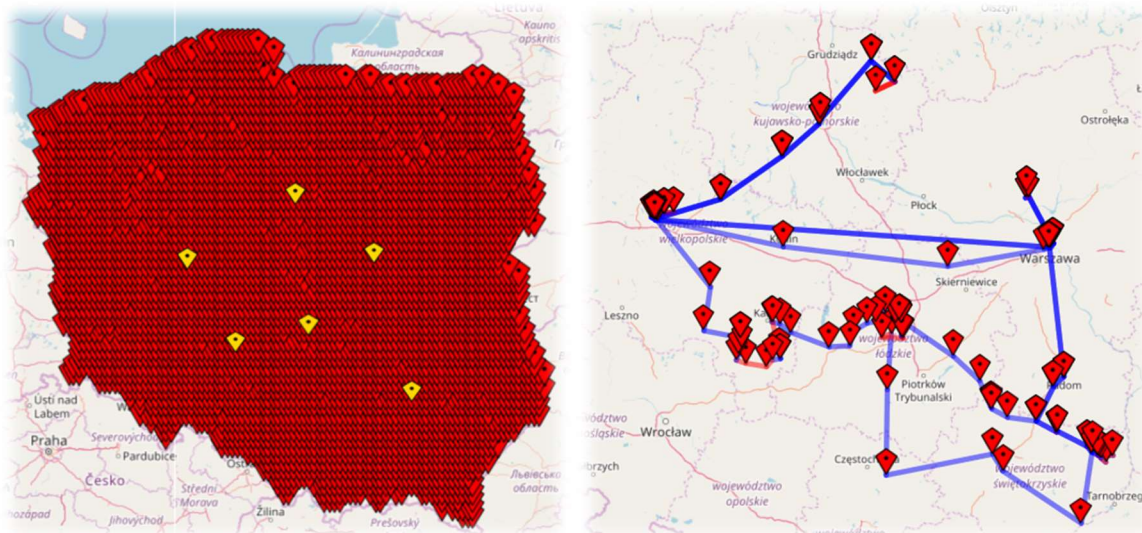
działania algorytmu polega na kolejnym wyznaczaniu ścieżek najkrótszych między węzłami oraz kolejnej aktualizacji rozwiązania najlepszego z dotychczas rozpatrzonych pod kątem minimalizacji odległości między węzłami. Aby zapewnić premię dla wyboru połączeń rzeczywistych, dobrano dziesięciokrotnie większą wartość kosztu wyboru połączenia pomocniczego względem rzeczywistego. Do wyznaczenia rozwiązania wykorzystano również drugie kryterium, związane z minimalizacją liczby przeskoków w połączeniach. Przykłady rozwiązań dla zadanych przykładowych punktów na mapie przedstawiono na poniższych rysunkach.

Algorytmy zostały zaimplementowane w środowisku Python, gdzie możliwy jest wybór stosowanego algorytmu (polegającego na minimalizacji liczby przeskoków czy minimalizacji długości całkowitej połączeń). W wielu przypadkach dla otrzymanych wyników połączenia pomocnicze, czyli te które zostały wygenerowane w ramach procesu wstępnego przetworzenia danych, stanowią znikomy procent wybranych połączeń i posiadają możliwie najmniejszą długość. Jest to pożądane działanie głównie ze względu na zwiększony koszt wykorzystania takiego połączenia, ze względu na potrzebę zbudowania linii. Algorytm doboru połączeń podczas procesu tworzenia topologii między zadanymi CPD zapewnia dodatkowo zrównoleglenie połączeń, aby zwiększyć odporność na awarię sieci.



Rys. 19 Przykład rozwiązania bazującego na wyznaczeniu topologii magistrali oraz posiadającego redundancję połączeń według topologii pierścienia. Po lewej – zadane węzły, po prawej – rozwiązanie.

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 20 Przykład rozwiązania zakładającego redundancję połączeń oraz minimalizację liczby przeskoków między zadanymi węzłami sieci. Po lewej – zadane węzły, po prawej – rozwiązanie.

Źródło: opracowanie własne.

4.3 Zadanie alokacji ograniczonych zasobów obciążen na przykładzie sieci wyznaczonej na danych rzeczywistych

Zadanie alokacji zasobów ograniczonych na zadanych zapotrzebowaniach w sieci, wymaga wyznaczenia możliwych połączeń między węzłami związanymi z zapotrzebowaniami. Połączenia między węzłami zostały wyznaczone przy wykorzystaniu strategii opartej na utworzeniu topologii magistrali. Głównym celem, który należy osiągnąć w rozpatrywanym problemie decyzyjnym, jest ostatecznie zwymiarowanie powstałej sieci, to znaczy maksymalizacja przepływów jakie można osiągnąć dla zadanych zapotrzebowań w sposób sprawiedliwy. Osiągnięcie ostatecznego rozwiązania składa się z sekwencji zadań jakimi są:

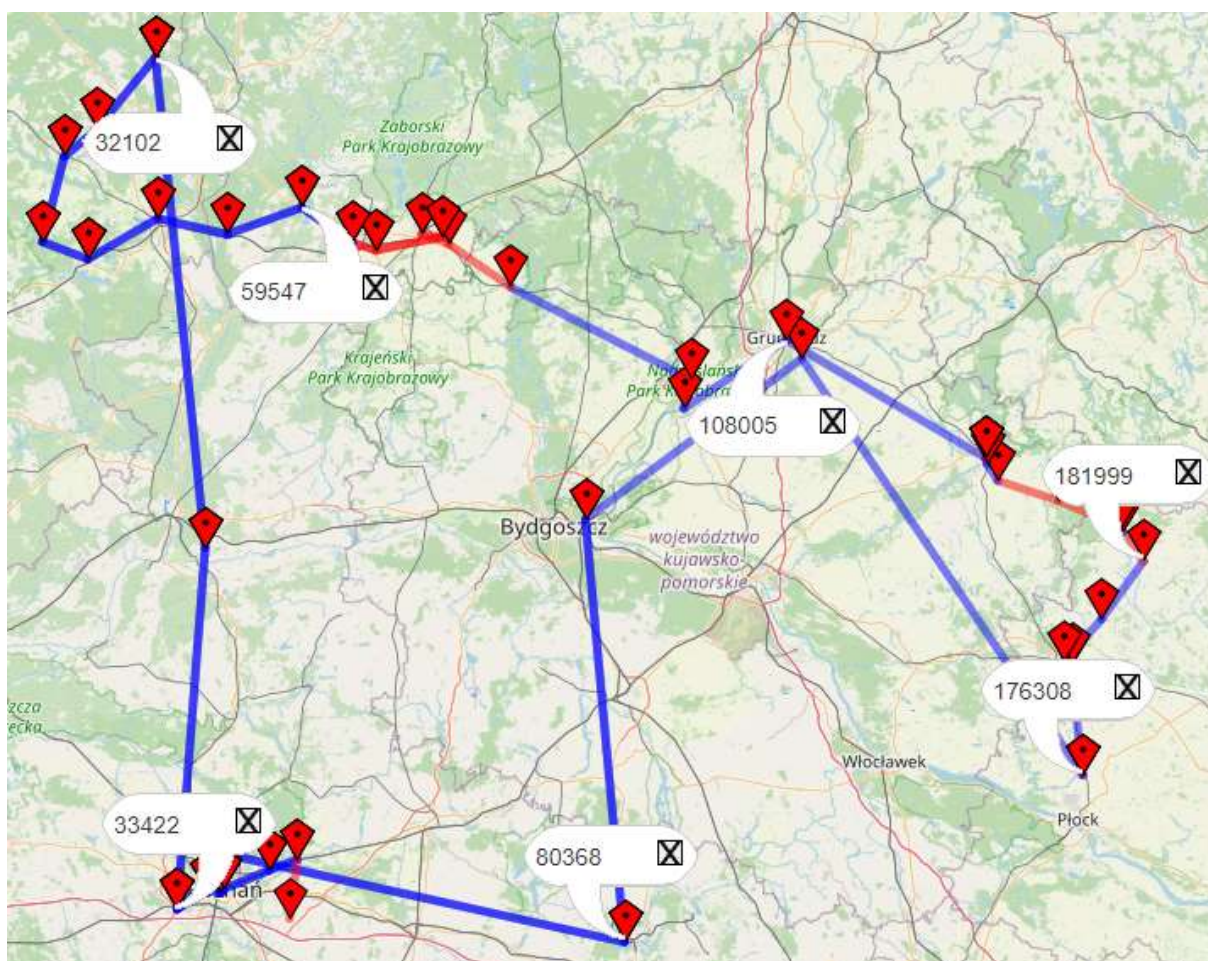
- wstępne przetworzenie danych w celu uspoźnienia sieci,
- wykorzystanie algorytmu wyznaczania połączeń między zadanymi węzłami,
- końcowe zwymiarowanie sieci polegające na wykorzystaniu modeli optymalizacji sprawiedliwej alokacji zasobów sieciowych na zadanych zapotrzebowaniach.

Opisane w poprzednim rozdziale algorytmy pozwoliły na wygenerowanie danych możliwych do wykorzystania w celu przetestowania zbudowanych modeli optymalizacji sprawiedliwej takich jak OWA, RPM oraz nowo opracowane modele ilorazowe. Modele matematyczne

wymienionych metod jak również ich opis zawierają się w poprzednich rozdziałach pracy. Przy pomocy wymienionych metod wykonano obliczenia dla wygenerowanej sieci telekomunikacyjnej. Tworzenie sieci, która jest przedmiotem kolejnych analiz, oparte jest na wyznaczeniu połączeń między zadanymi wierzchołkami, która posiada topologię magistrali, posiada możliwie najmniejszą długość całkowitą łączy oraz zapewnia połączenie między każdym zadanym węzłem. Do wizualizacji oraz w celu umożliwienia wprowadzenia parametrów wejściowych dokonano implementacji interfejsu graficznego. Tymi parametrami jest rozmieszczenie węzłów głównych budujących sieć (na przykład centrów przetwarzania danych). Do generacji sieci wybrano 6 punktów znajdujących się w okolicach Warszawy, Poznania, Wrocławia, Częstochowy, Bydgoszczy określających umiejscowienie kolejnych centrów przetwarzania danych.

Dla każdego z łączy dysponujemy wartością pojemności, której nie można przekroczyć podczas procesu wymiarowania. Celem zadania optymalizacyjnego jest znalezienie rozwiązania maksymalizującego przychód z alokacji obciążeń na zadanych siedmiu zapotrzebowaniach, które są widoczne na rys. 23. Przychód z alokacji jednostki obciążenia jest różny dla kolejnych zapotrzebowań i wynosi odpowiednio: 20, 30, 40, 20, 10, 15. Zapotrzebowania na lokację zasobów sieciowych współdzielą wybrane łuki. Stwarza to problem związany z konkurencją zapotrzebowań o ograniczone wartości pojemności współdzielonych łuków. Modele optymalizacji zostały zaimplementowane w środowisku ILOG CPLEX Optimization Studio.

Spośród wyznaczonych przykładów topologii wybrano jedną zbudowaną z 50 węzłów oraz 152 łuków (76 krawędzi). Wybrano 6 zapotrzebowań, w sposób który wymusza współdzielenie wybranych łuków między wybranymi zapotrzebowaniami.



Rys. 21 Ilustracja przykładowego rozwiązania wraz z identyfikatorami węzłów między którymi zadano zapotrzebowania na alokację zasobów sieciowych.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 19 Zapotrzebowań na alokację zasobów sieciowych

d	źródło (n_s)	ujście (n_t)
1	176308	59547
2	80368	181999
3	32102	176308
4	33422	181999
5	59547	80368
6	181999	33422

Źródło: opracowanie własne

Tabela 20 Wyniki cząstkowe otrzymane przez rozpatrywane modele optymalizacji sprawiedliwej wartości przychodów z zapotrzebowań alokacji zasobów sieciowych (MF):

Metoda	τ	β	MF 1	MF 2	MF 3	MF 4	MF 5	MF 6
MAX_INC	ND	ND	24100	34800	41360	0	22350	21585
MAXMIN	ND	ND	24100	13920	41360	13920	22350	21585
OWA	ND	ND	24100	21585	41360	8810	22350	21585
OWA	ND	ND	24100	13920	41360	13920	22350	21585
OWA	ND	ND	24100	21585	41360	8810	22350	21585
RBMAX	18000	0.1	24100	13920	41360	13920	22350	21585
RBMAX	22400	0.1	24100	34800	41360	0	22350	21585
RBMAX	18000	0.2	24100	13920	41360	13920	22350	21585
RBMAX	22400	0.2	24100	34800	41360	0	22350	21585
RBMAX	16000	0.3	24100	21585	41360	8810	22350	21585
RBMAX	22400	0.3	24100	34800	41360	0	22350	21585
RBMIN	18000	0.1	24100	13920	41360	13920	22350	21585
RBMIN	22400	0.1	24100	34800	41360	0	22350	21585
RBMIN	18000	0.2	24100	13920	41360	13920	22350	21585
RBMIN	22400	0.2	24100	34800	41360	0	22350	21585
RBMIN	16000	0.3	24100	21585	41360	8810	22350	21585
RBMIN	22400	0.3	24100	34800	41360	0	22350	21585
RGM	16000	ND	22350	21585	22350	8810	22350	21585
RGM	18000	ND	24100	21585	41360	8810	22350	21585
RGM	19600	ND	24100	22350	41360	8300	22350	21585
RGM	21200	ND	24100	24100	41360	7133.333	22350	21585
RGM	22000	ND	24100	34800	41360	0	22350	21585
RPM	ND	ND	24100	13920	41360	13920	22350	21585
RPM	ND	ND	24100	24100	0	7133.333	22350	21585
RPM	ND	ND	24100	2422.5	41360	21585	22350	21585

Źródło: opracowanie własne.

Do testów wykorzystano dane wygenerowane przez algorytmy wyszukiwania połączeń. Przetestowane zostały modele optymalizacji sprawiedliwej. W przypadku modeli: OWA, RPM oraz ilorazowego w wersji minimalizacji rozpatrzone zostały wyniki tych metod dla różnych zestawów danych wejściowych. Dla metody OWA oraz modelu ilorazowego kolejne zestawy

parametrów wejściowych przyjęły wartości przedstawione w tabeli 21, dla modelu RPM w tabeli 22

Tabela 21 Wartości parametrów wejściowych modelu OWA:

OWA - parametry	zestaw 1	zestaw 2	zestaw 3
waga 1	9	9	5
waga 2	8	1	4
waga 3	5	1	3
waga 4	4	1	2
waga 5	1	1	1
waga 6	1	1	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 22 Wartości parametrów wejściowych dla modelu RPM:

RPM - parametry	Utopia			Nadir		
	zestaw 1	zestaw 2	zestaw 3	zestaw 1	zestaw 2	zestaw 3
aspiracja 1	20 000	20 000	1 000	5 000	5 000	500
aspiracja 2	20 000	20 000	1 000	5 000	5 000	500
aspiracja 3	20 000	2 000	1 000	5 000	5 000	500
aspiracja 4	20 000	2 000	10 000	5 000	500	500
aspiracja 5	20 000	2 000	10 000	5 000	500	500
aspiracja 6	20 000	2 000	10 000	5 000	500	500

Źródło: opracowanie własne.

Zapotrzebowanie, które ulega zagłodzeniu, jest to o numerze 4. Jest to spowodowane współdzieleniem zasobów przez zapotrzebowania. Dane wejściowe dla poszczególnych pojemności, które zostały wygenerowane losowo, pozwalają jednak dla wszystkich metod optymalizacji sprawiedliwej na akceptowalny rozdział zasobów. Parametr β podawany jako parametr wejściowy w modelu ilorazowym, odnoszący się do procentu zapotrzebowań najbardziej dyskryminowanych pozwala na osiągnięcie spektrum rozwiązań pomiędzy najbardziej efektywnym z punktu widzenia przychodu, a najbardziej sprawiedliwym. Podobnie, analizując wyniki otrzymane przy pomocy metody uporządkowanych średnich

ważonych w zależności od wag przyjętych dla określonej liczby najmniej dochodowych zapotrzebowań, otrzymano rozwiązanie odpowiadające wynikowi otrzymanemu przy pomocy modelu jedno-kryterialnego, maksymalizującego przychód całkowity. Gdy zmieniany był rozkład wag, rozwiązanie zmierzało do bardziej sprawiedliwego, w kierunku rozwiązania otrzymanego przy pomocy modelu lexMAX. Spektrum rozwiązań można również otrzymać wykorzystując metodę punktu odniesienia, gdzie parametrem sterującym są wartości punktów nadiru oraz aspiracji.

Tabela 23 Wartości wybranych statystyk dla rozwiązań modeli optymalizacji liniowej:

Metoda	τ	beta	$\mu(\mathbf{y})$	G(y)	J(y)	F(y)
MAX	ND	ND	24032.50	0.29	0.78	0.37
MAXMIN	ND	ND	22872.50	0.20	0.86	0.33
OWA	ND	ND	23298.33	0.20	0.86	0.42
OWA	ND	ND	22872.50	0.20	0.86	0.33
OWA	ND	ND	23298.33	0.20	0.86	0.42
RBMAX	18000	0.1	22872.50	0.20	0.86	0.33
RBMAX	22400	0.1	24032.50	0.29	0.78	0.37
RBMAX	18000	0.2	22872.50	0.20	0.86	0.33
RBMAX	22400	0.2	24032.50	0.29	0.78	0.37
RBMAX	16000	0.3	23298.33	0.20	0.86	0.42
RBMAX	22400	0.3	24032.50	0.29	0.78	0.37
RBMIN	18000	0.1	22872.50	0.20	0.86	0.33
RBMIN	22400	0.1	24032.50	0.29	0.78	0.37
RBMIN	18000	0.2	22872.50	0.20	0.86	0.33
RBMIN	22400	0.2	24032.50	0.29	0.78	0.37
RBMIN	16000	0.3	23298.33	0.20	0.86	0.42
RBMIN	22400	0.3	24032.50	0.29	0.78	0.37
RGM	16000	ND	19838.33	0.10	0.94	0.27
RGM	18000	ND	23298.33	0.20	0.86	0.42
RGM	19600	ND	23340.83	0.21	0.85	0.42
RGM	21200	ND	23438.06	0.21	0.85	0.42
RGM	22000	ND	24032.50	0.29	0.78	0.37
RPM	ND	ND	22872.50	0.20	0.86	0.33
RPM	ND	ND	16544.72	0.29	0.75	0.22
RPM	ND	ND	22233.75	0.25	0.80	0.42

Źródło: opracowanie własne.

Obliczenia, które zostały wykonane dla wyznaczonej topologii zostały wykonane dla wybranych metod optymalizacji sprawiedliwej. Modelem, który wykazuje najbardziej atrakcyjne wyniki jest model ilorazowy wykorzystujący współczynnik Giniego jako współczynnik sprawiedliwości. Pozwala on uzyskać rozwiązanie, które wydajnością dorównuje rozwiązaniu uzyskanemu metodą ilorazową RBMIN przy odpowiednio dużym parametrze τ . Liczba zapotrzebowań, które zostały zdyskryminowane jest większa od zera głównie dla przypadków, gdy parametr τ został określony jako odpowiednio duża wartość lub w przypadku modelu RPM, gdzie jako nadir została przyjęta zbyt mała wartość. Przedstawiony przykład pozwala na stwierdzenie, że nowo opracowane modele optymalizacji sprawiedliwej pozwalają w bardzo prosty sposób na uzyskanie spektrum rozwiązań o wybranym stopniu sprawiedliwości. Rozwiązania te są uzyskiwane w sposób o wiele wydajniejszy niż w przypadku modeli OWA czy RPM ze względu na znacząco mniejszą liczbę parametrów sterujących rozwiązaniem. Dodatkowo struktura funkcji kryterium wykorzystywana przez modele ilorazowe zapewnia za każdym razem wyznaczenie punktu optymalnej równowagi między wybranym współczynnikiem sprawiedliwości a wydajnością systemu rozumianą jako maksymalizacja sumy obciążenia na zadanych zapotrzebowaniach zróżnicowanych między sobą zyskami jednostkowymi z alokacji obciążenia. Modele OWA oraz RGM pozwalają otrzymać rozwiązania sprawiedliwe, natomiast duża liczba parametrów sterujących jest uciążliwa. Dobór wartości parametrów jest również często trudny w przypadku metody Punktu Odniesienia, ponieważ jest on ściśle związany z końcowymi wartościami wektora ocen. W przypadku metody OWA dobór wag wpływa na sprawiedliwość rozwiązania. Najlepszy efekt osiągnięto przez zastosowanie metody ilorazowej, gdzie możliwe było osiągnięcie większego spektrum atrakcyjnych rozwiązań pod kątem kryterium sprawiedliwości przy jednym parametrze sterującym τ .

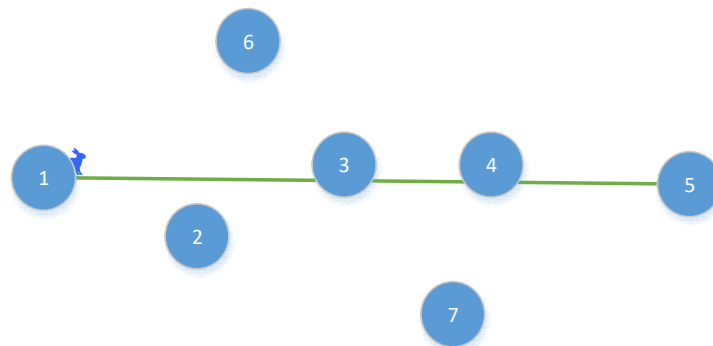
5 Algorytmy heurystyczne dla zestawiania połączeń w sieciach niepełnych

5.1 Metoda heurystyczna dla problemu ustalania połączeń między zadanymi lokalizacjami

W tym rozdziale zostały opisane wyniki badań związanych z wykorzystaniem metod heurystycznych, pozwalających na wyznaczanie ścieżek łączących zadane węzły w sieci, która nie musi być spójna. Jest to alternatywne podejście do zadania, opisanego w poprzednim rozdziale. Problemy sieciowe często porównać można z zagadnieniami transportowymi [73]. W odniesieniu do problemu zestawiania połączeń między zadaną grupą węzłów, wykonane prace badawcze pozwalają na stwierdzenie, że jako podejście probabilistyczne dobrym wyborem jest bazowanie na istniejących algorytmach heurystycznych takich jak symulowane wyżarzanie, algorytmy pszczelego roju czy też algorytmy genetyczne [74]. Obiecujące wyniki na tle innych metod daje implementacja metody heurystycznej bazującej na zachowaniu roju mrówek [75]. Właśnie to podejście było inspiracją do opracowania modelu wyszukiwania rozwiązania dla problemu wyznaczania połączeń między zadanymi lokalizacjami w badanej sieci charakteryzującej się wysoką niespójnością.

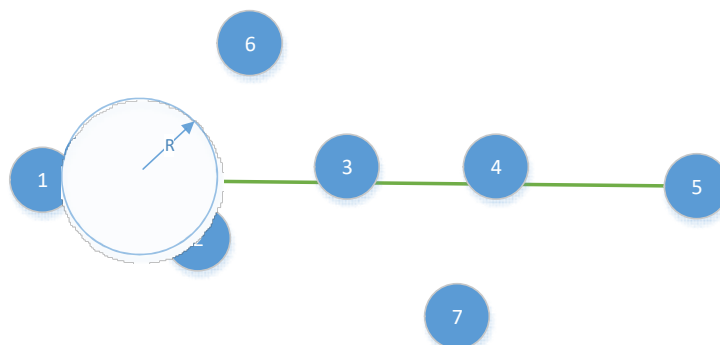
Do opracowania modelu przyjęto koncepcję bazującą na losowości kolejnych kroków algorytmu [76]. Podejście heurystyczne sprowadza się do implementacji kolejnych przeskoków między węzłami tworząc połączenia pomocnicze bądź wykorzystując istniejące łącza. Każdy przeskok jest poprzedzony analizą odległości między kolejnym punktem oraz losowością. Każdy kolejny węzeł dobierany jest przy ustaleniu tolerancji, która zmienia się w sposób losowy w zdefiniowanym przedziale (na przykład między 1 km, a 50 km). Przy opracowywaniu metody heurystycznej pozwalającej na znalezienie połączenia między zadanymi punktami można porównać do zachowania zająca szukającego drogi do odległego celu, do którego kierunek w linii prostej jest znany. Zając po drodze musi przy pomocy węchu wyszukiwać punkty kontrolne (pożywienie, postój). Zając robiąc kolejne kroki w kierunku celu, po każdym kroku zatrzymuje się i używa węchu szukając pożywienia (którym w odniesieniu do przykładu jest jeden z węzłów należących do zbioru węzłów zadanych Q). Gdy wywęszy pożywienie, zmierza do niego. Oczywiście zasięg węchu jest ograniczony. Dodatkowo zając pamięta, do kogo należała ścieżka, którą ostatnio przechodził i w przyszłości będzie preferował drogę należącą do tego samego właściciela. Zając nie może iść również drogą za wąską (przepustowość minimalna). Tak długo jak zając nie wywęszy pożywienia, dokonuje kolejnych

pojedynczych kroków w kierunku celu możliwie w linii prostej. Po każdym kroku następuje proces węższenia- czyli sprawdzania, czy w zasięgu wężu nie ma pożywienia (czyli jednego z węzłów zadanych). Kolejne kroki postępowania dla powyższej strategii. W pierwszym kroku następuje połączenie dwóch węzłów skrajnych linią prostą (jeden to początek, drugi to cel). Następnie wykonywany jest krok/skok w kierunku celu oraz sprawdzenie, czy w określonej odległości nie ma węzła zadanego. Jeżeli jeden z węzłów zadanych znajduje się w zasięgu promienia- natychmiastowy skok do niego możliwie najkrótszą drogą, spełniającą ograniczenia oraz wyznaczenie linii prostej do celu. W przeciwnym przypadku- krok poprzedni. Wykonanie kolejnego kroku w kierunku celu zapamiętując poprzednie kroki (przebytą ścieżkę) następuje do momentu osiągnięcia celu (ujścia zapotrzebowania).



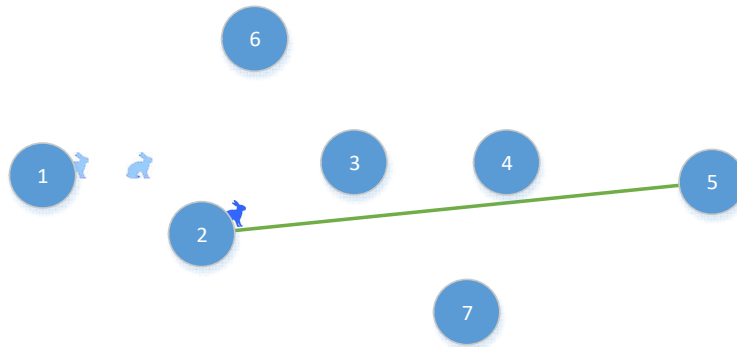
Rys. 22 Ilustracja kroku pierwszego- Wykonanie „skoku” w kierunku celu

Źródło: opracowanie własne.



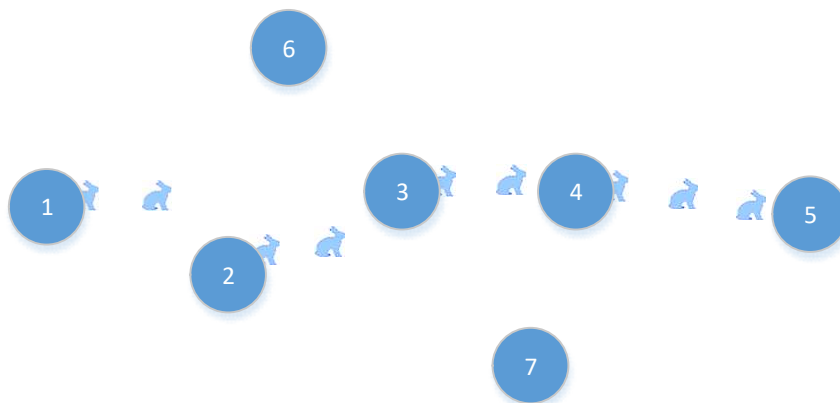
Rys. 23 Ilustracja kroku drugiego oraz trzeciego - Sprawdzenie czy w określonym promieniu R od obecnego miejsca nie ma węzła zadanego

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 24 Ilustracja kroku czwartego.

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 25 Przebyta ścieżka.

Źródło: opracowanie własne.

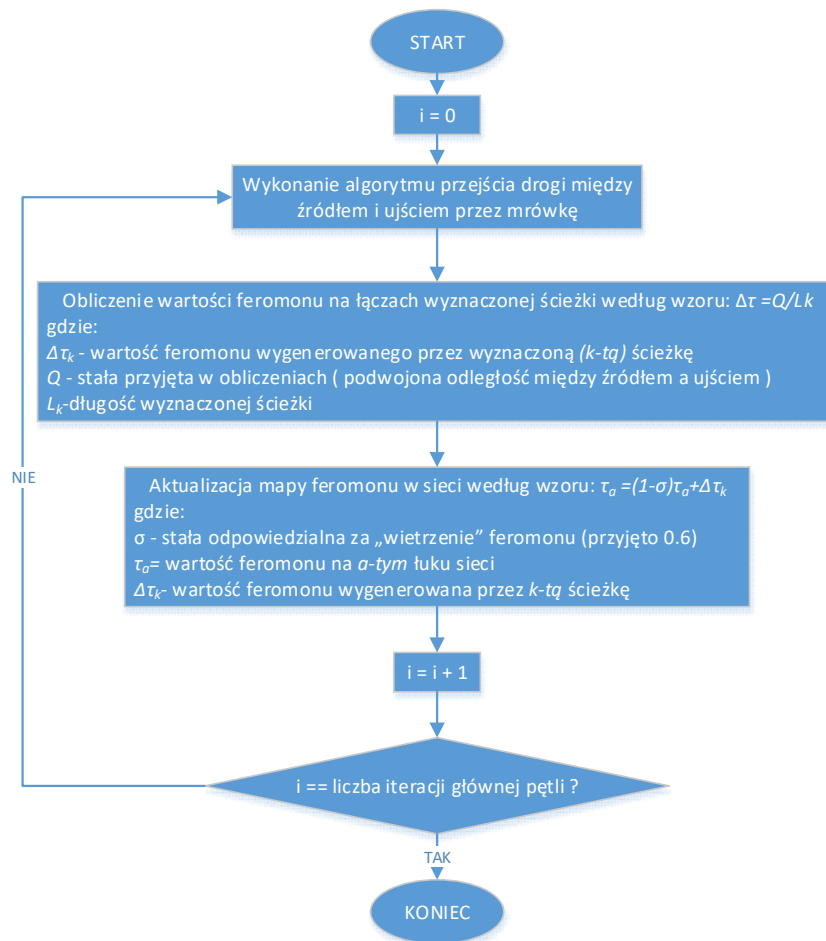
Wybór kolejnych węzłów powinien odbywać się według zasad prawdopodobieństwa. Dokładniej, należy wprowadzić do logiki element losowości w tym celu, aby dopuścić w kolejnych krokach wybór węzła, który wcale nie jest najbardziej atrakcyjny w tym kroku. W przypadku nie uwzględnienia wspomnianej losowości, algorytm będzie zwracał w każdej iteracji rozwiązanie zbieżne z podejściem zachłannym. W większości przypadków rozwiązania bazujące na metodzie zachłannej zwracają rozwiązania nieoptymalne. Odnosząc to do analizy przebiegu funkcji kryterium, zwracane metodą zachłanną rozwiązania odpowiadają ekstremom lokalnym funkcji. Wprowadzenie losowości pozwala na opuszczenie ekstremum lokalnego w celu dotarcia do ekstremum globalnego funkcji kryterium. Obserwując zachowanie roju mrówek, taką losowość podczas kolejnych wyborów gwarantuje wprowadzenie śladu zostawianego przez mrówkę. Ślad ten nazywany jest poprawnie feromonem lub zapachem, który zostawia za sobą mrówka. Z czasem feromon wietrzeje, jeżeli żadna mrówka nie odwiedzi danej lokalizacji bądź zwiększa o określony procent swoje natężenie, gdy miejsce

zostanie przez mrówkę odwiedzone. Mrówka wybierając drogę kieruje się tym właśnie zapachem, ale jednocześnie zawsze istnieje określona wartość prawdopodobieństwa, która pozwala na wybranie przez mrówkę innej drogi. W ten sposób najkrótsza ścieżka po określonym czasie zawsze zostanie wyznaczona. Ilustruje to poniższy rysunek.



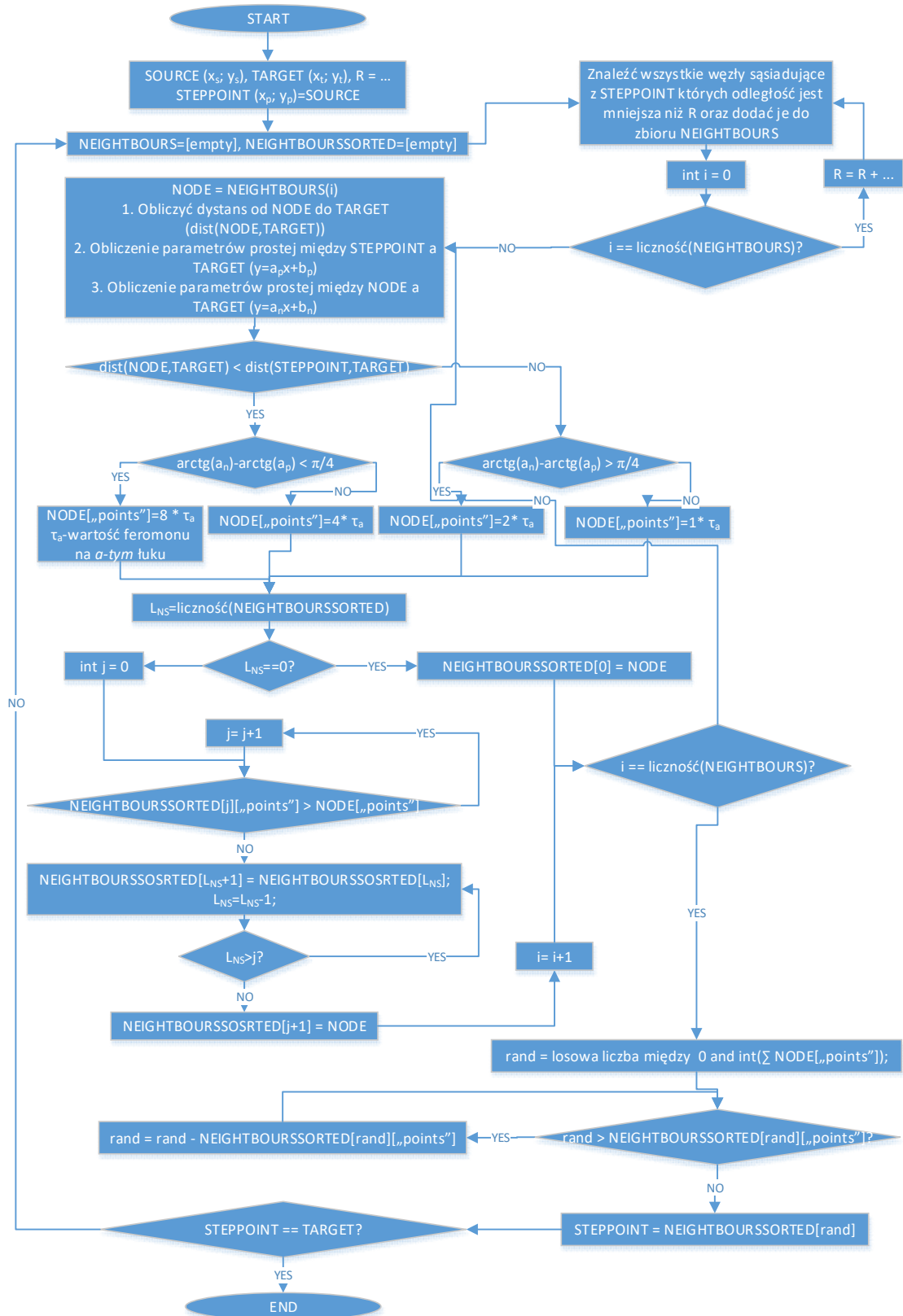
Rys. 26 Ilustracja głównej idei algorytmu heurystycznego bazującego na roju mrówek

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 27 Algorytm zachowania kolejnych mrówek w algorytmie heurystycznym

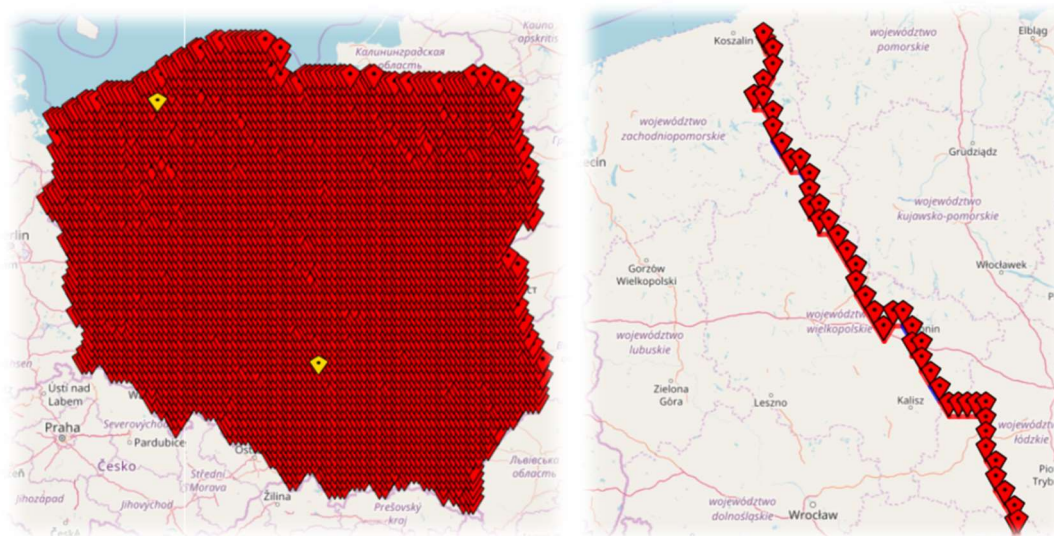
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 28 Algorytm doboru kolejnych łącz powtarzany w każdej iteracji przejścia mrówki

Źródło: opracowanie własne.

Algorytm heurystyczny, który został przedstawiony przy pomocy narysowanych schematów jest modyfikacją algorytmu heurystycznego odzwierciedlającego zachowanie roju mrówek. Algorytm ze względu na dość wysoką złożoność obliczeniową wymagał wykonania wstępnego przetworzenia danych w celu zmniejszenia złożoności sieci. Proces ten polegał na zaokrągleniu wartości współrzędnych węzłów, co pozwoliło na ich zgrupowanie w kolejne obszary. W ten sposób każdy istniejący węzeł sieci otrzymał indeks grupy, a proces wyszukiwania ścieżki optymalnej został przeprowadzony między grupami. Rozwiązanie osiągnięte w ten sposób jest akceptowalną aproksymacją rozwiązania rzeczywistego, osiąganą w czasie zbliżonym do rzeczywistego. Dla przetworzonego zbioru danych osiągnięto zadowalające wyniki. Uzyskane rozwiązania zawierają w sobie połączenia rzeczywiste oraz wygenerowane połączenia pomocnicze tam, gdzie nie ma możliwości wykorzystania istniejących. Algorytm preferuje połączenia istniejące przez sukcesywne zamienianie połączeń pomocniczych. Przykładowe rozwiązanie osiągnięte tą metodą zostało przedstawione na rysunkach poniżej.



Rys. 29 Przykład rozwiązania zadania połączenia węzłów w sieci niespójnej przy wykorzystaniu algorytmu heurystycznego wzorującego się na zachowaniu kolonii mrówek. Po lewej – zadane węzły, po prawej – rozwiązanie.

Źródło: opracowanie własne.

Przeprowadzone testy algorytmu pozwalają stwierdzić, że może on stanowić alternatywę do podejścia opisanego w rozdziale poprzednim (4.2.1). Złożoność obliczeniowa algorytmu uniemożliwia jednak wykorzystanie go bezpośrednio dla danych o tak dużych rozmiarach jak rozmiary badanej sieci. Przedstawiony wynik został osiągnięty dla węzłów, których współrzędne zostały zaokrąglone do części dziesięciotysięcznych, co ograniczyło liczbę

węzłów. Dzięki temu algorytm w stosunkowo krótkim czasie wyznaczył połączenie między zadaną parą węzłów. Implementację opracowanego algorytmu wykonano w języku Python oraz dołączono ten algorytm jako alternatywny względem algorytmów bazujących na wyznaczeniu połączeń w sieci spójnej.

6 Wskazanie osiągniętych celów i ewentualnych niepowodzeń oraz określenie dalszych kroków i możliwych kierunków rozwoju

W pracy przedstawiono implementację istniejących modeli optymalizacji sprawiedliwej oraz opracowanie nowych uwzględniających sprawiedliwość rozwiązań. Przeprowadzone testy obliczeniowe pozwoliły na wykonanie porównania efektywności rozpatrywanych algorytmów w odniesieniu do szeroko pojętego problemu sieci. Model heurystyczny związany z wyszukiwaniem połączenia między zadaną parą węzłów w grafie o wysokiej niespójności okazał się dość złożony obliczeniowo w przypadku sieci o dużej liczbie węzłów. Liczba węzłów znacząco wpływa na pojedyncze iteracje. Powoduje to potrzebę ograniczania liczby węzłów, na przykład przez zmniejszanie precyzji przechowywanych danych przestrzennych. Wiąże się to z jakością rozwiązania przez to, że wynik otrzymany w ten sposób zawsze będzie pewnym przybliżeniem rozwiązania optymalnego.

Praca pozwoliła na opracowanie oraz implementację wybranych modeli optymalizacji liniowej, które biorą pod uwagę kryterium sprawiedliwości. Modele mogą być stosowane w różnych dziedzinach gospodarki takich jak transport, telekomunikacja, problemy alokacji ograniczonych zasobów i wiele innych. Modele zostały przetestowane oraz porównane między sobą. Została wykonana również analiza problemu wyszukiwania połączeń między zadanymi węzłami w sieci z uwzględnieniem niespójności. Na podstawie danych rzeczywistych opracowano metodologię zwiększenia stopnia spójności sieci oraz umożliwienie znalezienia połączeń między wybranymi węzłami. Na przykładzie wygenerowanego wyniku dla kilku zadanych węzłów została utworzona sieć, której topologia posłużyła jako źródło dodatkowych danych testowych dla badanych modeli optymalizacji sprawiedliwej. Przeprowadzone badania pozwoliły na zgłębienie problemów związanych z wymiarowaniem sieci. Ten obszar wiedzy wymaga jednak dalszych prac związanych z rozwijaniem algorytmów heurystycznych do tworzenia topologii połączeń między zadaną grupą węzłów sieci. Podczas analizy problemów niespójności sieci oraz związanego z tym przypadku tworzenia się podsieci rozłącznych istnieje również zapotrzebowanie na opracowanie algorytmu wyszukiwania podsieci rozłącznych w grafie, w celu wyznaczenia bardziej miarodajnego współczynnika spójności sieci. Do przyszłych zadań w tej dziedzinie należy również usprawnienie obecnych oraz opracowanie nowych, bardziej efektywnych metod uspójniania sieci oraz opracowanie bardziej efektywnych

metod heurystycznych pozwalających na wyznaczenie połączenia między zadanymi węzłami sieci w grafie niespójnym lub o bardzo niskiej spójności.

Rozpatrywany w pracy przykład oparty na alokacji ograniczonych zasobów sieciowych jest tylko jednym z możliwych zastosowań opisanych w pracy modeli. Problemy decyzyjne gdzie występuje zazwyczaj problem sprawiedliwości można spotkać w innych dziedzinach życia i gospodarki takich jak:

- rozkład przestrzenny punktów obsługi,
- dystrybucja dóbr,
- ruch lotniczy i kolejowy,
- podejmowanie decyzji rozdziale zasobów w przedsiębiorstwie,
- projekty maszyn,
- architektura,
- medycyna,
- transport,
- inne.

W każdym z tych obszarów może pojawić się problem optymalizacji sprawiedliwej. Przestrzenne rozmieszczenie instytucji pożytku publicznego jest problemem, w którym to właśnie kryterium sprawiedliwości jest najważniejsze. W transporcie lotniczym problemem z tym związanym jest udzielaniem zezwoleń na dostęp do przestrzeni powietrznej podczas lądowania lub startu samolotów. Problem staje się bardziej skomplikowany, gdy niektóre linie lotnicze chcą być traktowane w specjalny sposób, płacąc dodatkowe opłaty za korzystanie z usług portu lotniczego. Podobne zjawisko występuje w zarządzaniu ruchem kolejowym, gdzie na danej linii kolejowej dopuszcza się ograniczoną liczbę pociągów. Innym przykładem jest przypadek organizacji, w których menadżer musi podejmować decyzje dotyczące sprawiedliwego podziału ograniczonych zasobów dla każdego działu lub pracowników, na przykład premii. Podczas projektowania wielu urządzeń, maszyn, pojazdów, budynków itp. pojawia się problem pomiędzy maksymalizacją kosztów produkcji, a jakością wykonania przy zadanej stałej wartości sprzedaży. W medycynie przykłady mogą być bardziej rozbudowane. Przykładem jest problem dystrybucji ograniczonych zasobów leków pomiędzy pacjentów. Wiele zadań optymalizacyjnych istnieje również w gałęzi gospodarki transportowej. W logistyce, w każdym rodzaju transportu, stale pojawiają się nowe problemy do rozwiązania, również z wykorzystaniem technik optymalizacji sprawiedliwej. Problemy decyzyjne związane

z alokacją zasobów ograniczonych są więc obecne na co dzień w wielu branżach i gałęziach gospodarki. Do wcześniej wymienionych możemy dodać również inne przykłady takie jak:

- rozdział dotacji dla osób ubiegających się o wsparcie,
- rozmieszczenie stacji nadawczych tak aby każdy użytkownik miał dostęp do sygnału na określonym poziomie jakości,
- rozmieszczenie patroli interwencyjnych służb mundurowych (policja, straż pożarna, karetka, itp) tak aby jak najszybciej byli w stanie przeprowadzić interwencje,
- rozdział pasma transmisji danych w sieciach telekomunikacyjnych.

Wśród tej ostatniej kategorii znajduje się również zbiór problemów, które były przedmiotem badań opisanych w pracy. Są to problemy alokacji obciążenia na zadanych zapotrzebowaniach w sieci. Wszędzie tam gdzie pojawia się kilka czynników, które są brane pod uwagę równocześnie podczas podejmowania decyzji występuje problem decyzyjny wielokryterialny. Zazwyczaj podjęcie decyzji najlepszej z punktu widzenia jednego kryterium wpływa negatywnie na inne czynniki. Rozpatrzmy przypadek sieci telekomunikacyjnej, która jest zbudowana z węzłów oraz połączeń między nimi. Zapotrzebowaniem będzie w tym przypadku potrzeba zestawienia połączenia między zadanymi węzłami sieci o jak największej przepustowości. Przepustowość wpływa na jakość i prędkość połączenia. Przydział zasobów sieciowych jednemu zapotrzebowaniu wpływa na inne ograniczając dostępną przepustowość na współdzielonych łączach sieci. Dobrym przykładem jest serwis internetowy, który udostępnia treści multimedialne takie jak filmy. Lokalizacja, w której on się znajduje, będzie węzłem początkowym zapotrzebowania, a węzłem docelowym będzie klient, który tą treść ściąga do siebie. Połączenie między węzłami zazwyczaj nie jest bezpośrednie. Najczęściej składa się ono z kilku węzłów pośredniczących czyli również kilku łączy pośredniczących. W najprostszym przypadku, kiedy mamy do obsłużenia tylko jedno zapotrzebowanie, najlepszym rozwiązaniem będzie zapewnienie przepustowości połączenia tak wysokiej jak łącze posiadające najmniejszą przepustowość. Problem się komplikuje, kiedy do obsługi jest kilka zapotrzebowań, które dodatkowo współdzielą wybrane łącza. Może w takim przypadku dojść do blokowania niektórych zapotrzebowań. Opisane w rozprawie prace badawcze mają na celu wsparcie decyzji w przypadku takich problemów, przy wykorzystaniu algorytmów optymalizacyjnych pozwalających na uzyskanie odpowiedzi w czasie rzeczywistym. Prace badawcze, w ramach których powstało oprogramowanie wspierające procesy decyzyjne są obecnie kontynuowane i rozwijane. Na co dzień często nie doceniamy

tego typu usprawnień lecz wdrożenie tego typu algorytmów gwarantuje poprawne funkcjonowanie wielu systemów, które pozwalają na przepływ informacji.

Prace związane z budową algorytmów heurystycznych są innym sposobem na rozwiązywanie problemów, tam gdzie optymalizacja liniowa nie wystarcza. W pracy przedstawiono podejście alternatywne do problemów związanych z wyszukiwaniem najkrótszej ścieżki. Jest to obszar, gdzie modele liniowe nie zawsze dadzą akceptowalny rezultat dla przypadków sieci bardzo rozbudowanych, gdzie dodatkowo może wystąpić problem niespójności sieci. W pracy zaproponowano kilka alternatyw na rozwiązanie zadania opartego na danych rzeczywistych. Jako efekt badań w pracy opisano rezultaty, jakie są możliwe do wdrożenia dla podobnych problemów decyzyjnych nie tylko w przypadkach sieci telekomunikacyjnych, ale również w problemach związanych a logistyką, transportem.

7 Spis pojęć i oznaczeń użytych w pracy

Oznaczenie	Opis
RZO	Rozdział Zasobów Ograniczonych
N	zbiór węzłów, gdzie n_i – i -ty węzeł sieci
L	zbiór łuków, gdzie l_i – i -ty łuk sieci
R	zbiór wartości przychodów jednostkowych z rezerwacji przepustowości na d -tym zapotrzebowaniu
D	zbiór zapotrzebowań na obciążenie między parą węzłów
C	zbiór pojemności łuków sieci, gdzie c_l – pojemność l -tego łuku
S	zbiór źródeł przyporządkowanych do d -tego zapotrzebowania
T	zbiór ujść przyporządkowanych do d -tego zapotrzebowania
P	zbiór ścieżek umożliwiających alokację zapotrzebowania, wykorzystywany w notacji łuk-ścieżka
u_l	oznacza dołączenie l -tego łuku do tworzonej sieci oraz posiada wartości logiczne (1 jeżeli łuk jest wykorzystywany w sieci, 0 w przeciwnym przypadku)
v_l	oznacza koszt wykorzystania l -tego łuku
y_l	oznacza wykorzystanie l -tego łuku w sieci oraz przyjmuje wartości logiczne (1 jeżeli łuk jest wykorzystywany w sieci, 0 w przeciwnym przypadku)
x	Zmienna decyzyjna (np. x_{lp} - obciążenie łuku należącego do ścieżki)
$f(x)$	Wartość funkcji kryterium dla wektora alokacji zmiennych decyzyjnych
Q	zbiór określający pełną przestrzeń decyzyjną (no. Zbiór możliwych alokacji)
$f_i(x)$	i -ta wartość funkcji kryterium, pozwalająca na zwrócenie miary jakości decyzji
$\mathbf{f}(x)$	wektor funkcji kryterium
X	przestrzeń decyzyjna (dziedzina możliwych alokacji)
Y	przestrzeń miar (zbiór wartości funkcji kryterium)
\mathbf{x}	wektor alokacji
x_{ld}	wartość przydziału dla l -tego łuku związanego z d -tym zapotrzebowaniem

\mathbf{y}	wektor kolejnych wartości kryterium / miary jakości dla alokacji lub wektora alokacji
y_i	i-ta wartość funkcji kryterium dla alokacji bądź wektora alokacji
RGM	Model ilorazowy przyjmujący współczynnik Giniego jako miarę nierówności
RBMIN	Model ilorazowy przyjmujący średnią z β – procent wartości najbardziej dyskryminowanych jako miarę równości (wariant minimalizacji)
RBMAX	Model ilorazowy przyjmujący średnią z β – procent wartości najbardziej dyskryminowanych jako miarę równości (wariant maksymalizacji)
RPM	Metoda Punktu Odniesienia
OWA	Metoda Uporzędkowanych Średnich Ważonych
EffMAX	Metoda jednokryterialna optymalizująca wydajność systemu bez względu na sprawiedliwość
POF	Koszt sprawiedliwości
$\Delta_{\max}(\mathbf{y})$	Maksymalna różnica bezwzględna
$\bar{\Delta}(\mathbf{y})$	Średnia różnica bezwzględna
$\sigma_{\max}(\mathbf{y})$	Maksymalne odchylenie bezwzględne
$\bar{\sigma}(\mathbf{y})$	Średnie odchylenie bezwzględne
$\sigma^2(\mathbf{y})$	Wariancja / kwadrat odchylenia standardowego
$\bar{\delta}_-(\mathbf{y})$	Średnie semi-odchylenie dolne
$\bar{\delta}_+(\mathbf{y})$	Średnie semi -odchylenie górne
$\bar{\sigma}_-(\mathbf{y})$	Semi-odchylenie standardowe dolne
$\bar{\sigma}_+(\mathbf{y})$	Semi-odchylenie standardowe górne
$\Delta_-(\mathbf{y})$	Maksymalne odchylenie dolne

$\Delta_+(\mathbf{y})$	Maksymalne odchylenie górne
$G(\mathbf{y})$	Współczynnik Giniego
$J(\mathbf{y})$	Współczynnik Jaina
$F(\mathbf{y})$	Współczynnik Hossfelda
$\Delta_\beta(\mathbf{y})$	Średnia k -największych (lub najmniejszych) półodchyłeń
$F_y^{(-1)}(\beta)$	Funkcja kwantylowa liczona dla β – procentu wartości
$F_y(d)$	Dystrybuanta wartości
lexMAX	Model maksymalizacji leksykograficznej
MAXMIN	Model maksymimalizacji max-min
PF	Model sprawiedliwości proporcjonalnej (ang. proportional fairness)
NL	Sformułowanie zadania na połączenie wierzchołków w sieci według podejścia wierzchołek-łuk (ang. node-link)
a_{nl}	parametr o wartości binarnej przyjmujący wartość 1 w przypadku, gdy l -ty łuk wychodzi z n -tego wężła oraz 0 w przeciwnym przypadku
b_{nl}	parametr o wartości binarnej przyjmujący wartość 1 w przypadku, gdy l -ty łuk wchodzi do n -tego wężła oraz z 0 w przeciwnym przypadku
LP	Sformułowanie zadania na połączenie wierzchołków w sieci według podejścia łuk-ścieżka (ang. link-path)
δ_{lp}	Macierz incydencji łuków oraz ścieżek określająca przynależność l -tego łuku do p -tej ścieżki
σ_{pl}	zawierającej wartości logiczne określające, czy l -te łącze należy do p -tej ścieżki
ϕ_{pd}	Macierz zawierająca wartości logiczne określające, czy p -ta ścieżka może być użyta do obsługi d -tego żądania.
CPD	Centrum Przetwarzania Danych

8 Bibliografia

- [1] D. Bertsimas, V. F. Farias, N. Trichakis, "The price of fairness", *Oper. Res.*, tom 59, nr. 1, str. 17-31, 2011
- [2] E. Altman, K. Avrachenkov, A. Garnaev, "Generalized α -fair resource allocation in wireless networks", 47th IEEE Conference on Decision and Control, str. 2414-2419, 2008
- [3] H. Shi, R. V. Prasad, E. Onur, I. G. M. M. Niemegeers, "Fairness in wireless networks: Issues, measures and challenges," *IEEE Commun. Surv. Tutorials*, tom 16, nr 1, str. 5–24, 2014
- [4] C. Gini, "Variabilità e mutabilità", Bologna, 1912
- [5] R. Jain, D. Chiu, W. Hawe, "A Quantitative Measure Of Fairness And Discrimination For Resource Allocation In Shared Computer Systems", Eastern Research Lab, 1984
- [6] T. Hoßfeld, L. Skorin-Kapov, P. E. Heegaard, M. Varela, "A new QoE fairness index for QoE management", *Qual. User Exp.*, tom 3, nr. 1, str. 1-23, 2018
- [7] A. B. Atkinson, "On the measurement of inequality", *J. Econ. Theory*, tom 2, nr. 3, str. 244-263, 1970
- [8] M. Dianati, X. Shen, S. Naik, "A new fairness index for radio resource allocation in wireless networks", *IEEE Wirel. Commun. Netw. Conf. WCNC*, tom 2, str.712-717, 2005
- [9] S. Orłowski, R. Wessaly, M. Pióro, A. Tomaszewski, "SNDlib 1.0 – survivable network design library", *Networks*, tom 55, nr. 3, str. 276-286, 2009
- [10] G. Lisowski, "Zasady sprawiedliwego podziału dóbr", Wydawnictwo naukowe Scholar, Warszawa, 2008
- [11] J. Rawls, E. Kelly, "Justice as Fairness", The Belknap Press of Harvard University Press, 2003
- [12] M. Mostajabdaveh, W. J. Gutjahr, F. Sibel Salman, "Inequity-averse shelter location for disaster preparedness", *IISE Trans.*, tom 51, nr. 8, str. 809–829, 2019
- [13] W. Gutjahr, S Fisher, "Equity and deprivation costs in humanitarian logistics", *Eur. J. Oper. Res.*, tom 270, nr 1, str. 185-197, 2018
- [14] S. Rath, M. Gendreau, W. Gutjahr, "Bi-objective stochastic programming models for determining depot locations in disaster relief operations", *Int. Trans. Oper. Res.*, tom 23, nr 6, str. 997–1023, 2016
- [15] B. Vitoriano, J. Montero, D. Ruan, "Decision Aid Models for Disaster Management and Emergencies", Atlantis Press, Amsterdam, 2013
- [16] W. Gutjahr, P. Nolz, "Multicriteria optimization in humanitarian aid", *European J. Oper. Res.*, tom 252, nr 2, str. 351-366
- [17] W. Ogryczak, "Bicriteria models for fair and efficient resource allocation", *Lect. notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. notes Artif. Intell. Lect. notes Bioinformatics)*, tom 6430, str. 140–159, 2010
- [18] W. Ogryczak, H. Luss, M. Pióro, D. Nace, A. Tomaszewski, "Fair optimization and networks: A survey", *J. Astrl. Math.*, tom 2014, str., 2014
- [19] T. Bekta, H. Luss, "On equitable resource allocation problems: A lexicographic minimax approach", *Oper. Res.*, tom 47, nr. 3, str. 361–378, 1999

- [20] W. Ogryczak, "Inequality measures and equitable locations", *Ann. Oper. Res.*, tom 167, nr. 1, str. 61-86, 2009
- [21] W. Ogryczak, M. Zawadzki, "Conditional median: A parametric solution concept for location problems", *Ann. Oper. Res.*, tom 110, nr. 1-4, str. 167–181, 2002
- [22] G. Zalewski, W. Ogryczak, "Network dimensioning with maximum revenue efficiency for the fairness index", *J. Telecommun. Inf. Technol.*, tom 2016, nr. 4, str. 15-21, 2016
- [23] M. Barbati, C. Piccolo, "Equality measures properties for location problems", *Optim. Lett.*, tom 10, nr. 5, str. 903-920, 2016
- [24] K. Walkowiak, M. Klinkowski, oraz P. Lechowicz, "Dynamic routing in spectrally spatially flexible optical networks with back-to-back regeneration", *J. Opt. Commun. Netw.*, tom 10, nr. 5, str. 523-534,
- [25] K. Walkowiak, M. Klinkowski, "Energy Efficiency of Dynamic Routing in Elastic Optical Networks with Back-to-Back Regeneration", *Int. Conf. Comput. Netw. Commun. ICNC*, str. 399-403, 2018
- [26] K. Walkowiak, M. Klinkowski, oraz P. Lechowicz, "Scalability Analysis of Spectrally-Spatially Flexible Optical Networks with Back-to-Back Regeneration", *Int. Conf. Transparent Opt. Networks*, tom 2018, nr. Lipiec, str. 6-9, 2018
- [27] K. Walkowiak, P. Lechowicz, M. Klinkowski, "A Study on the Impact of Inter-Core Crosstalk on SDM Network Performance", *Int. Conf. Transparent Opt. Networks*, nr. Lipiec, str. 5-8, 2018
- [28] L. Buzna, M. Koháni, J. Janáček, "An approximation algorithm for the facility location problem with lexicographic minimax objective" *J. Appl. Math.*, tom 2014, 2014
- [29] D. Nace, M. Pióro, "Max-min fairness and its applications to routing and load-balancing in communication networks: A tutorial", *IEEE Commun. Surv. Tutorials*, tom 10, nr 4, str. 5–17, 2008
- [30] L. Buzna, M. Koháni, J. Janáček, "An approximation algorithm for the facility location problem with lexicographic minimax objective", *J. Appl. Math.*, tom 2014, 2014
- [31] J. A. Paul, L. MacDonald, "Location and capacity allocations decisions to mitigate the impacts of unexpected disasters", *Eur. J. Oper. Res.*, tom 251, nr 1, str. 252–263, 2016
- [32] J. Le Boudec, "A Unified Framework for Max-Min and Min-Max", tom 15, nr 5, str. 1073–1083, 2007
- [33] W. Ogryczak, T. Śliwiński, A. Wierzbicki, "Fair resource allocation schemes and network dimensioning problems" , *J. Telecommun. Inf. Technol.*, tom 2003, nr. 3, str. 34-42, 2003
- [34] M. Zukerman, L. Tan, H. Wang, I. Ouveysi, "Efficiency-fairness tradeoff in telecommunications networks", *IEEE Commun. Lett.*, tom 9, nr 7, str. 643–645, 2005
- [35] W. Ogryczak, A. Tomaszewski, M. Pióro, "Telecommunications network design and max-min optimization problem", *J. Telecommun. Inf. Technol.*, tom 2005, nr. 3, str. 43-56, 2005
- [36] W. Ogryczak, M. Pióro, A. Tomaszewski, "Telecommunications network design and max-min optimization problem," *J. Telecommun. Inf. Technol.*, tom 2005, nr 3, str. 43–56, 2005.
- [37] H. Luss, "Equitable bandwidth allocation in content distribution networks", *Nav. Res. Logist.*, tom 57, nr. 3, str. 266-278, 2010
- [38] A. Jajszczyk, "Routing, Flow, and Capacity Design in Communication and Computer Networks", tom 43, nr 5, San Francisco, 2005.

- [39] W. Ogryczak, T. Śliwiński, "On equitable approaches to resource allocation problems: the conditional minimax solutions", *J. Telecommun. Inf. Technol.*, tom 3, nr. 3, str. 40-48, 2002
- [40] W. Ogryczak, "Fair optimization - Methodological foundations of fairness in network resource allocation", *Proc. - IEEE 38th Annu. Int. Comput. Softw. Astrl. Conf. Work. COMPSACW*, nr. 3, str. 43-48, 2014
- [41] J. Rawls, "A Theory of Justice", Belknap Press, Massachusetts, 1971
- [42] M. Rothschild, J. E. Stiglitz, "Some Further Results on the Measurement of Inequality", *Some Further Results on the Measurement of Inequality*, tom 6, nr. Czerwiec, str. 188-204, 1973
- [43] T. Lan, D. Kao, M. Chiang, A. Sabharwal, "An axiomatic theory of fairness in network resource allocation", *Proc. - IEEE INFOCOM*, str. 1-9, San Diego, 2010
- [44] W. Ogryczak, A. Wierzbicki, "On multi-criteria approaches to bandwidth allocation", *Control Cybern.*, tom 33, nr. 3, str. 427-448, 2004
- [45] J. Kleinberg, Y. Rabani, É. Tardos, "Fairness in routing and load balancing", *J. Comput. Syst. Sci.*, tom 63, nr. 1, str. 2-20, 2001
- [46] M. Shehaj, D. Nace, D. Nace, I. Kalesnikau, M. Pióro, "Link dimensioning of hybrid FSO/fiber networks resilient to adverse weather conditions", *Computer Networks*, tom 161, nr. Maj, str. 1-25, 2019
- [47] S. Fourour, Y. Lebbah, "Equitable Optimization for Multicast Communication", *Int. J. Decis. Support Syst. Technol.*, tom 12, nr. 3, str. 1-25, 2020
- [48] J. B. Orlin, "Network flows: Theory, algorithms and applications", *Discret. Appl. Math.*, tom 50, nr. 1, str. 99, 1994
- [49] W. Ogryczak, "Tail mean oraz related robust solution concepts", *Int. J. Syst. Sci.*, tom 45, nr. 1, str. 29-38, 2014
- [50] A. Łodziński, "Zastosowanie metody punktu odniesienia do znajdowania decyzji symetrycznie efektywnych w modelowaniu wielokryterialnym procesu negocjacji dwustronnych", *Studia i Materiały Informatyki Stosowanej*, nr. 13, str. 19-28, 2013
- [51] W. Ogryczak, T. Śliwiński, "On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective", *Eur. J. Oper. Res.*, tom 148, nr. 1, str. 80-91, 2003
- [52] R. R. Yager, J. Kacprzyk, G. Bielačkov, "Recent developments in the ordered weighted averaging operators: theory and practice", Springer, 2011
- [53] R. R. Yager, "On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, tom 18, nr. 1, str. 183-190, 1988
- [54] W. Ogryczak, "Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Modele preferencji i zastosowania do wspomaganiania decyzji", Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, 1997
- [55] G. Zalewski, W. Ogryczak, "Comparison of selected fair-optimization methods for flow maximization between given pairs of nodes in telecommunications network", *J. Telecommun. Inf. Technol.*, tom 2016, nr. 3, str. 18-24, 2016
- [56] W. Ogryczak, A. Tamir, "Minimizing the sum of the k largest functions in linear time", *Inf. Process. Lett.*, tom 85, nr. 3, str. 117-122, 2003
- [57] W. Ogryczak, A. Wierzbicki, M. Milewski, "Fair and efficient network dimensioning with the reference point methodology", *J. Telecommun. Inf. Technol.*, nr 4, str 21-30, 2006

- [58] G. Guastaroba, R. Mansini, W. Ogryczak, M. G. Speranza, "Enhanced index tracking with CVaR-based ratio measures", *Ann. Oper. Res.*, tom 292, nr 2, str. 883–931, 2020
- [59] W. Ogryczak, M. Przyłuski, T. Śliwiński, "Portfolio optimization with reward-risk ratio measure based on the conditional value-At-risk", *Lect. Notes Eng. Comput. Sci.*, tom 2220, str. 913-918, 2015
- [60] H. P. Young, "Equity - In Theory and Practice", Princeton University Press, 1995
- [61] G. Zalewski, W. Ogryczak, "Network dimensioning with minimum unfairness cost for the efficiency", *Adv. Intell. Syst. Comput.*, tom 559, str. 217-229, 2018
- [62] T. Drezner, Z. Drezner, J. L. Guyse, "Equitable service by a facility: minimizing the Gini coefficient", *Comput. Oper. Res.*, tom 36, nr. 12, str. 3240-3246, 2009
- [63] W. Ogryczak, G. Zalewski, "Fair Resource Allocation by Gini Index Minimization", w: B. Fortz, M. Labbe *Operations Research Proceedings*, Springer, 2019
- [64] J. Kleinberg, É. Tardos, "Algorithm Design", Pearson Addison Wesley, 2006
- [65] N. Noyan, B. Balcik, S. Atakan, "A stochastic optimization model for designing last mile relief networks", *Transp. Sci.*, tom 50, nr 3, str. 1092–1113, 2016
- [66] A. Gogu, D. Nace, S. Chatterjea, A. Dilo, "Max-min fair link quality in WSN based on SINR", *J. Appl. Math.*, tom 2014, 2014
- [67] R. C. Prim, "Shortest connection networks and some generalizations", *Bell Syst. Tech. J.*, nr. Maj 8, str. 1389-1401, 1957
- [68] M. Sysło, "O złożoności obliczeniowej problemów kombinatoryki i teorii grafów", *Rocz. Pol. Tow. Mat.*, tom 3, str. 53-98, 1980
- [69] A. Madkour, "A Survey of shortest-path algorithms", arXiv preprint, nr. Maj, str. 1-26, 2017
- [70] M. Sniedovich, "Dijkstra's algorithm revisited: the dynamic programming connexion", *Control Cybern.*, tom 35, nr. 3, str. 599-620, 2006
- [71] J. Urbański, "GIS w badaniach przyrodniczych", eBook, 2012
- [72] A. Anisya, G. Y. Swara, "Implementation of haversine formula and best first search method in searching of tsunami evacuation route", *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.*, tom 97, nr. 1, str. 1-7, 2017
- [73] P. Hanczar, "Wspomaganie decyzji w obszarze wyznaczania tras pojazdów", *Decyzje*, nr. 13, str. 55-83, 2010
- [74] K. Kiełkiewicz, Z. Kokosiński, "Algorytm hybrydowy dla probabilistycznego problemu komiwojażera", *Czas. Tech. Autom.*, tom 109, str. 115-126, 2012
- [75] L. Bianchi, M. Dorigo, L. M. Gambardella, W. J. Gutjahr, "A survey on metaheuristics for stochastic combinatorial optimization", *Nat. Comput.*, tom 8, nr. 2, str. 239-287, 2009
- [76] J. Drożdż, K. Pieńkosz, "Dekompozycja połączeń teleinformatycznych na ścieżki z jak najmniejszą liczbą węzłów", *Praca dyplomowa inżynierska*, Politechnika Warszawska – Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, 2016.

9 Spis rysunków

Rys. 1 Wyniki obliczonych miar dla przykładu rozmieszczenia punktów medycznych.....	24
Rys. 2 Przykład współdzielenia łączy l3 przez żądania d1 oraz d2.	35
Rys. 3 Struktura przykładu ilustrującego problem alokacji zapotrzebowań na przepustowość na zdefiniowanych ścieżkach.....	41
Rys. 4 Topologia sieci rozpatrywanej w zadaniu optymalizacji.	43
Rys. 5 Ilustracja zadanych zapotrzebowań na alokację obciążeń w zadanej sieci.....	44
Rys. 6 Ilustracja przykładowych warstw model OWA	48
Rys. 7 Wykres przedstawiający obliczone miary jakości dla badanych metod.....	54
Rys. 8 Ilustracja zależności między optymalizowanymi miarami w modelu Markowitza.....	62
Rys. 9 Przykładowy zbiór rozwiązań dopuszczalnych Q wraz z prostą wyznaczającą rozwiązanie zadania optymalizacji w punkcie styku.	63
Rys. 10 Wyniki dla notacji NL.....	84
Rys. 11 Metodyka podejścia do problemu niespójności	91
Rys. 12 Histogram ilustrujący rozkład długości łuków przechowywanych w bazie, których długość jest mniejsza niż 3000m.	93
Rys. 13 Histogram ilustrujący rozkład liczebności łuków o długości większej niż 10000m. .	93
Rys. 14 Przykład obrazujący proces oszacowania wartości parametru pozwalającego na równe traktowanie skali na osiach układu współrzędnych	95
Rys. 15 Rozpatrzone zakresy przedziałów dla tolerancji długości doboru połączeń pomocniczych	96
Rys. 16 Obszar korytarza dla węzłów zadanych- pośredniczących dla drogi głównej.....	98
Rys. 17 Przykład rozwiązania dla strategii 2, gdzie 6, 7 są węzłami dołączonymi do drogi głównej możliwie najkrótszą drogą spełniającą wymagania przepustowości.	98
Rys. 18 Awaria łączy skutkująca brakiem łączności między niektórymi węzłami.....	99

Rys. 19	Przykład rozwiązania bazującego na wyznaczeniu topologii magistrali oraz posiadającego redundancję połączeń według topologii pierścienia. Po lewej – zadane węzły, po prawej – rozwiązanie.	100
Rys. 20	Przykład rozwiązania zakładającego redundancję połączeń oraz minimalizację liczby przeskoków między zadanymi węzłami sieci. Po lewej – zadane węzły, po prawej – rozwiązanie.	101
Rys. 21	Ilustracja przykładowego rozwiązania wraz z identyfikatorami węzłów między którymi zadano zapotrzebowania na alokację zasobów sieciowych.	103
Rys. 22	Ilustracja kroku pierwszego- Wykonanie „skoku” w kierunku celu.....	109
Rys. 23	Ilustracja kroku drugiego oraz trzeciego - Sprawdzenie czy w określonym promieniu R od obecnego miejsca nie ma węzła zadanego	109
Rys. 24	Ilustracja kroku czwartego.	110
Rys. 25	Przebyta ścieżka.	110
Rys. 26	Ilustracja głównej idei algorytmu heurystycznego bazującego na roju mrówek	111
Rys. 27	Algorytm zachowania kolejnych mrówek w algorytmie heurystycznym.....	111
Rys. 28	Algorytm doboru kolejnych łączy powtarzany w każdej iteracji przejścia mrówki.	112
Rys. 29	Przykład rozwiązania zadania połączenia węzłów w sieci niespójnej przy wykorzystaniu algorytmu heurystycznego wzorującego się na zachowaniu kolonii mrówek. Po lewej – zadane węzły, po prawej – rozwiązanie.....	113

10 Spis tabel

Tabela 1 Wyniki obliczeń wybranych miar statystycznych dla sprawiedliwości na przytoczonym przykładzie problem decyzyjnego.	23
Tabela 2 Wartości parametrów metod sprawiedliwych	52
Tabela 3 Wartości przychodów z przydziału jednostek obciążenia dla zestawu 1 wektora wartości przychodów jednostkowych (NL).....	52
Tabela 4 Wartości obciążeń na zadanych zapotrzebowaniach na obciążenie (NL).....	53
Tabela 5 Współczynniki jakościowe dla modeli OWA oraz RPM (NL).....	54
Tabela 6 Wyniki dla modeli RPM oraz OWA dla notacji LP.....	56
Tabela 7 Wartości alokacji obciążeń na zadanych zapotrzebowaniach dla modeli OWA oraz RPM w notacji LP	58
Tabela 8 Wyniki uzyskane dla modelu RBMIN (NL) dla kolejnych wartości parametru β , oraz wartości podstawowych statystyk obliczonych dla uzyskanego rozwiązania dla $\tau = 3700$	69
Tabela 9 Wyniki uzyskane dla modelu RBMIN (LP) dla kolejnych wartości parametru β , oraz wartości podstawowych statystyk obliczonych dla uzyskanego rozwiązania dla $\tau = 3700$	70
Tabela 10 Wyniki uzyskane dla modelu (NL) RBMIN dla parametru $\tau = 4300$	71
Tabela 11 Wyniki uzyskane dla modelu RBMIN (LP) dla parametru $\tau = 4300$	72
Tabela 12 Wyniki obciążeń (H) osiągnięte dla innych wartości parametru τ ograniczone do rozwiązań silnie sprawiedliwych uzyskanych dla modelu RBMIN (NL)	73
Tabela 13 Wyniki obciążeń (H) osiągnięte dla innych wartości parametru τ ograniczone do rozwiązań silnie sprawiedliwych uzyskanych dla modelu RBMIN (LP).....	73
Tabela 14 Wyniki obliczeń dla modelu RBMAX (NL) dla wartości parametru $\tau = 4400$	77
Tabela 15 Wyniki modelu RBMAX (LP) dla parametru $\tau = 4400$	78

Tabela 16 Wyniki osiągnięte dla innych wartości parametru τ ograniczone do rozwiązań silnie sprawiedliwych uzyskanych dla modelu RBMAX.....	78
Tabela 17 Wartości wektorów funkcji osiągnięcia posortowanych niemalejąco.....	81
Tabela 18 Wyniki statystyk i współczynników obliczonych dla opracowanych metod ilorazowych.....	82
Tabela 19 Zapotrzebowań na alokację zasobów sieciowych.....	103
Tabela 20 Wyniki cząstkowe otrzymane przez rozpatrywane modele optymalizacji sprawiedliwej wartości przychodów z zapotrzebowań alokacji zasobów sieciowych (MF).....	104
Tabela 21 Wartości parametrów wejściowych modelu OWA.....	105
Tabela 22 Wartości parametrów wejściowych dla modelu RPM.....	105
Tabela 23 Wartości wybranych statystyk dla rozwiązań modeli optymalizacji liniowej.....	106